BÀI GIẢNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Mục tiêu: Nắm vững 4 phương trình lượng giác cơ bản và cách giải.

❖ **Kiến thức**

+ Biết cách áp dụng công thức nghiệm đối với từng phương trình lượng giác cơ bản.

+ Vận dụng để giải những trường hợp mở rộng của 4 phương trình lượng giác cơ bản.

I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Phương trình $\sin x = a$

– Nếu $|a|>1$: Phương trình vô nghiệm.

– Nếu $|a|\le 1$. Đặt $a = \sin\alpha$ hoặc $a = \sin\beta^\circ$, phương trình tương đương với

$$\sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi \\ x=\pi-\alpha+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

$$\sin x=\sin\beta^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\beta^\circ+k.360^\circ \\ x=180^\circ-\beta^\circ+k.360^\circ \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

$$\sin x=a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arcsin a+k2\pi \\ x=\pi-\arcsin a+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Tổng quát:

$$\sin f\left(x\right)=\sin g\left(x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=g\left(x\right)+k2\pi \\ f\left(x\right)=\pi-g\left(x\right)+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Các trường hợp đặc biệt

- $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.
- $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.
- $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

2. Phương trình $\cos x = a$

– Nếu $|a|>1$: Phương trình vô nghiệm.

– Nếu $|a|\le 1$. Đặt $a=\cos\alpha$ hoặc $a=\cos\beta^\circ$, phương trình tương đương với

$$\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow x=\pm\alpha+k2\pi \ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

$$\cos x=\cos\beta^\circ \Leftrightarrow x=\pm\beta^\circ+k.360^\circ \ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

$$\cos x=a \Leftrightarrow x=\pm\arccos a+k2\pi \ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Tổng quát:

$$\cos f\left(x\right)=\cos g\left(x\right) \Leftrightarrow f\left(x\right)=\pm g\left(x\right)+k2\pi \ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Các trường hợp đặc biệt

- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

3. Phương trình $\tan x = a$

Điều kiện $\cos x \neq 0$.

- $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.
- $\tan x = \tan\beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.
- $\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Tổng quát:

$\tan f\left(x\right) = \tan g\left(x\right) \Leftrightarrow f\left(x\right) = g\left(x\right) + k\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

5. Phương trình $\cot x = a$

Điều kiện $\sin x \neq 0$.

- $\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.
- $\cot x = \cot\beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.
- $\cot x = a \Leftrightarrow x = arc\cot a + k\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Tổng quát:

$\cot f\left(x\right) = \cot g\left(x\right) \Leftrightarrow f\left(x\right) = g\left(x\right) + k\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

Điều kiện: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $a = \tan\alpha$.

α đặc biệt $\Rightarrow x = \alpha + k\pi$.

α không đặc biệt

$\Rightarrow x = \arctan a + k\pi$.

$\tan x = a$

Trường hợp 1: $|a| > 1$.

Phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $|a| \leq 1$.

Đặt $a = \sin\alpha$.

α đặc biệt

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$

$(k \in \mathbb{Z})$

α không đặc biệt

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{array}\right.$

$(k \in \mathbb{Z})$

$\sin x = a$

Phương trình lượng giác cơ bản

$\cos x = a$

Trường hợp 1: $|a| > 1$.

Phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $|a| \leq 1$.

Đặt $a = \cos\alpha$.

α đặc biệt

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.$

$(k \in \mathbb{Z})$

α không đặc biệt

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{array}\right.$

$(k \in \mathbb{Z})$.

$\cot x = a$

Điều kiện $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $a = \cot\alpha$.

α đặc biệt $\Rightarrow x = \alpha + k\pi$.

α không đặc biệt

$\Rightarrow x = arc\cot a + k\pi$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Phương trình $\sin x = a$

- **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Giải phương trình $2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$. (1)

Hướng dẫn giải

$(1)\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ 3x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ 3x=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3}\\ x=\frac{5\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3}\\ x=\frac{5\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sin\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{5}\right)=0$. (2)

Hướng dẫn giải

$(2)\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(x-\frac{2\pi}{5}\right)=0\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(x-\frac{2\pi}{5}\right)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+\frac{2\pi}{3}=x-\frac{2\pi}{5}+k2\pi\\ 3x+\frac{2\pi}{3}=\pi-\left(x-\frac{2\pi}{5}\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{8\pi}{15}+k\pi\\ x=\frac{11\pi}{60}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{8\pi}{15}+k\pi\\ x=\frac{11\pi}{60}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ví dụ 3. Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình $\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)\right]=0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)\right]=0\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)=k\pi$

$\Leftrightarrow 3x-\sqrt{9x^2-16x-80}=4k\Leftrightarrow\sqrt{9x^2-16x-80}=3x-4k$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x\ge 4k\\ 9x^2-16x-80=9x^2-24kx+16k^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x\ge 4k\\ x=\frac{2k^2+10}{3k-2}\end{cases}\cdot$$

Xét $x=\frac{2k^2+10}{3k-2}\Rightarrow 9x=\frac{18k^2+90}{3k-2}=\frac{2\left(9k^2-4\right)+98}{3k-2}=2\left(3k+2\right)+\frac{98}{3k-2}$.

Vì $x\in\mathbb{N}^*$ nên $9x\in\mathbb{N}^*\Rightarrow 3k-2\in$ Ư (98) $=\{\pm1;\pm2;\pm7;\pm14;\pm49;\pm98\}$.

Lại có $\begin{cases}x\in\mathbb{N}^*\\2k^2+10>0\left(k\in\mathbb{Z}\right)\end{cases}\Rightarrow 3k-2>0\ \Rightarrow 3k-2\in\{1;2;7;14;49;98\}\Leftrightarrow k\in\{1;3;17\}$.

- Với $k=1$ thì $x=12$ (thỏa mãn $3x\geq 4k$).
- Với $k=3$ thì $x=4$ (thỏa mãn $3x\geq 4k$).
- Với $k=17$ thì $x=12$ (không thỏa mãn $3x\geq 4k$).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên dương là $x\in\{4;12\}$.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho phương trình $\sin\left(x+\pi\right)=\dfrac{m+2}{m-1}$, m là tham số. Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm?

A. $m\leq-\dfrac{1}{4}$.
B. $m\leq-\dfrac{1}{2}$.
C. $\forall m\in\mathbb{R}$.
D. Không tồn tại giá trị của m

Câu 2: Phương trình $\sin x=\dfrac{1}{2}$ có nghiệm thỏa mãn $\dfrac{-\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ là

A. $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.
B. $x=\dfrac{\pi}{6}$.
C. $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.
D. $x=\dfrac{\pi}{3}$.

Câu 3: Số nghiệm của phương trình $\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}=0$ trên đoạn $\left[0;3\pi\right]$ là

A. 8. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 4: Cho phương trình $\sin\dfrac{x}{3}=m^2+9$, m là tham số. Với giá trị nào của m thì phương trình vô nghiệm?

A. $-3<m<3$.
B. $m<3$.
C. $\forall m\in\mathbb{R}$.
D. Không tồn tại giá trị của m.

ĐÁP ÁN

1-B	**2-B**	**3-D**	**4-C**

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Phương trình $\sin\left(x+\pi\right)=\dfrac{m+2}{m-1}$ có nghĩa $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow D=\mathbb{R}$, $m\neq1$.

Ta có $-1 \le \sin\left(x+\pi\right) \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le \dfrac{m+2}{m-1} \ (1) \\ \dfrac{m+2}{m-1} \le 1 \quad (2) \end{cases}$.

Giải (1). Ta có $-1 \le \dfrac{m+2}{m-1} \Leftrightarrow \dfrac{2m+1}{m-1} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m \le \dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$.

Giải (2). Ta có $\dfrac{m+2}{m-1} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{m-1} \le 0 \Leftrightarrow m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Kết hợp nghiệm ta có $m \le -\dfrac{1}{2}$.

Câu 2.

Phương trình $\sin x = \dfrac{1}{2}$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Do $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ nên $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Vì $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ nên $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Câu 3.

Phương trình $\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x} = 0$ có nghĩa $\Leftrightarrow 1-\cos x \ne 0 \Leftrightarrow \cos x \ne 1 \Leftrightarrow x \ne k2\pi \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{k2\pi\right\}$.

Ta có $\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2} \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Kết hợp với điều kiện ta có $\left[\begin{array}{l} x = \left(2k+1\right)\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Do $x \in \left[0; 3\pi\right] \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$, $x = \dfrac{5\pi}{2}$, $x = 3\pi$.

Vậy phương trình có 5 nghiệm.

Câu 4.

Phương trình $\sin\dfrac{x}{3} = m^2 + 9$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Ta có $-1 \le \sin\dfrac{x}{3} \le 1 \Leftrightarrow -1 \le m^2 + 9 \le 1 \Leftrightarrow -10 \le m^2 \le -8$ (vô lí).

Vậy phương trình vô nghiệm với $\forall m \in \mathbb{R}$.

Dạng 2: Phương trình $\cos x = b$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Giải phương trình $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$. $\quad(1)$

Hướng dẫn giải

$(1)\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{6}=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{12}+k2\pi\\2x=\frac{-5\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{24}+k\pi\\x=\frac{-5\pi}{24}+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{24}+k\pi\\x=\frac{-5\pi}{24}+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin 5x=0$. $\quad(2)$

Hướng dẫn giải

$(2)\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 5x\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-5x+k2\pi\\2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+5x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{42}+\frac{k2\pi}{7}\\x=\frac{5\pi}{18}-\frac{2k\pi}{3}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{42}+\frac{k2\pi}{7}\\x=\frac{5\pi}{18}-\frac{2k\pi}{3}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ví dụ 3. Cho phương trình $\cos\left(x+\pi\right)=\frac{m+2}{m-1}$, m là tham số. Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Phương trình $\cos\left(x+\pi\right)=\frac{m+2}{m-1}$ có nghĩa $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow D=\mathbb{R}$, $m\neq 1$.

Ta có $-1\leq\cos\left(x+\pi\right)\leq 1\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leq\frac{m+2}{m-1}\ (1)\\\frac{m+2}{m-1}\leq 1\quad(2)\end{cases}$.

Giải (1). Ta có $-1 \le \frac{m+2}{m-1} \Leftrightarrow \frac{2m+1}{m-1} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m \le \frac{-1}{2} \end{array}\right.$.

Giải (2). Ta có $\frac{m+2}{m-1} \le 1 \Leftrightarrow \frac{3}{m-1} \le 0 \Leftrightarrow m-1<0 \Leftrightarrow m<1$.

Kết hợp nghiệm ta có $m \le -\frac{1}{2}$.

Vậy với $m \le -\frac{1}{2}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Phương trình $2\cos x+\sqrt{2}=0$ có nghiệm là

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

B. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{-3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

C. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{-5\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

D. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{-\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Câu 2: Phương trình $2\cos\frac{x}{2}+\sqrt{3}=0$ có nghiệm là

A. $x=\pm\frac{5\pi}{3}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x=\pm\frac{5\pi}{6}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x=\pm\frac{5\pi}{6}+k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x=\pm\frac{5\pi}{3}+k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3: Phương trình $\cos 3x=\cos\frac{\pi}{15}$ có nghiệm là

A. $x=\pm\frac{\pi}{15}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x=\pm\frac{\pi}{45}+\frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x=-\frac{\pi}{45}+\frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x=\frac{\pi}{45}+\frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 4: Phương trình $\cos^2 x=\frac{1}{2}$ có nghiệm là

A. $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x=\pm\frac{\pi}{2}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 5: Phương trình $\cos 2x=\cos x$ có cùng tập nghiệm với phương trình

A. $\sin\frac{3x}{2}=0$. **B.** $\sin x=1$. **C.** $\sin 4x=1$. **D.** $\sin 2x=1$.

Câu 6: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ với $0\le x\le 2\pi$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 7: Phương trình $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\cos\pi x\right)=\frac{1}{2}$ có bao nhiêu họ nghiệm?

A. 1 họ nghiệm. **B.** 4 họ nghiệm. **C.** 6 họ nghiệm. **D.** 2 họ nghiệm.

ĐÁP ÁN

1-B	**2-D**	**3-B**	**4-A**	**5-A**	**6-C**	**7-C**			

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Phương trình $2\cos x+\sqrt{2}=0$ có nghĩa $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow D=\mathbb{R}$.

Ta có $2\cos x+\sqrt{2}=0\Leftrightarrow \cos x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

Do $\cos\frac{3\pi}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ nên $\cos x=\frac{-\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{-3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 2.

Phương trình $2\cos\frac{x}{2}+\sqrt{3}=0$ có nghĩa $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow D=\mathbb{R}$.

Ta có $2\cos\frac{x}{2}+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\cos\frac{x}{2}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Do $\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ nên $\cos\frac{x}{2}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos\frac{x}{2}=\cos\frac{5\pi}{6}\Leftrightarrow x=\pm\frac{5\pi}{3}+k4\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 3.

Phương trình $\cos 3x=\cos 12^\circ$ có nghĩa $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow D=\mathbb{R}$.

Do $\cos 12^\circ=\cos\frac{\pi}{15}$ nên $\cos 3x=\cos 12^\circ\Leftrightarrow\cos 3x=\cos\frac{\pi}{15}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 3x=\frac{\pi}{15}+k2\pi \\ 3x=\frac{-\pi}{15}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{45}+\frac{k2\pi}{3} \\ x=\frac{-\pi}{45}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Câu 4.

Phương trình $\cos^2 x=\frac{1}{2}$ có nghĩa $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow D=\mathbb{R}$.

Ta có $\cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$.

Xét $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Xét $\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Kết hợp nghiệm ta được $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 5.

Phương trình $\cos 2x = \cos x$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Ta có $\cos 2x = \cos x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x + k2\pi \Leftrightarrow x = k2\pi \\ 2x = -x + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$.

$\sin\frac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$;

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

$\sin 4x = 1 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$;

$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình $\sin\frac{3x}{2} = 0$ có cùng tập nghiệm với phương trình $\cos 2x = \cos x$.

Câu 6.

Phương trình $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Ta có $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.$.

Do $0 \le x \le 2\pi$ nên $x = \frac{23\pi}{12}$; $x = \frac{17\pi}{12}$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn $0 \le x \le 2\pi$.

Câu 7.

Phương trình $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\cos\pi x\right) = \frac{1}{2}$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$.

Vì $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ nên $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\cos\pi x\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin\left(\frac{5\pi}{3}\cos\pi x\right)=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{5\pi}{3}\cos\pi x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ \frac{5\pi}{3}\cos\pi x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\pi x=\frac{1}{10}+k\frac{6}{5}\\ \cos\pi x=\frac{1}{2}+k\frac{6}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\pi x=\frac{1}{10}\\ \cos\pi x=\frac{1}{2}\\ \cos\pi x=\frac{-7}{10}\end{array}\right.\text{ (vì } -1\le\cos\pi x\le 1\text{).}$$

Ta có $\cos\pi x=\frac{1}{10}\Leftrightarrow\pi x=\pm arc\cos\frac{1}{10}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$;

$\cos\pi x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\pi x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)\Rightarrow x=\pm\frac{1}{3}+2k\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$;

$\cos\pi x=\frac{-7}{10}\Leftrightarrow\pi x=\pm arc\cos\frac{-7}{10}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\pi}arc\cos\frac{-7}{10}+2k\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy phương trình có 6 họ nghiệm.

Dạng 3: Phương trình $\tan x=m$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Giải phương trình $3\tan\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$. $\quad(1)$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\Leftrightarrow 5x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{5},\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

$\left(1\right)\Leftrightarrow\tan\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\tan\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 5x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+k\pi\Leftrightarrow 5x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{60}+k\frac{\pi}{5},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=-\frac{\pi}{60}+k\frac{\pi}{5},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cot x$. $\quad(2)$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\begin{cases}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq l\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\\ x\neq l\pi\end{cases}\ \left(k;l\in\mathbb{Z}\right)$.

$\left(2\right)\Leftrightarrow\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-x+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3},\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3},(k\in\mathbb{Z})$.

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Nghiệm của phương trình $\tan\left(x+15^\circ\right)=1$ với $90^\circ<x<270^\circ$ là

A. $x=210^\circ$. **B.** $x=135^\circ$. **C.** $x=60^\circ$. **D.** $x=120^\circ$.

Câu 2: Phương trình $\sqrt{3}\tan x+3=0$ có nghiệm là

A. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Câu 3: Phương trình $\tan^2 x=3$ có nghiệm là

A. $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

C. Vô nghiệm.

D. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Câu 4: Nghiệm của phương trình $\tan x=-\tan\frac{\pi}{5}$ trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ là

A. $\frac{4\pi}{5}$. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{3\pi}{5}$. **D.** $\frac{2\pi}{5}$.

Câu 5: Phương trình $\tan\left(\frac{\pi}{4}\sin 4x\right)=\frac{3}{2}$ có bao nhiêu họ nghiệm?

A. 2 họ nghiệm. **B.** 6 họ nghiệm. **C.** Vô nghiệm. **D.** 4 họ nghiệm.

Câu 6: Phương trình lượng giác $\sqrt{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)-\sqrt{2}=0$ có nghiệm là

A. $x=k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

ĐÁP ÁN

1-A	**2-D**	**3-B**	**4-A**	**5-C**	**6-A**				

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Ta có $\tan 45^\circ=1\Leftrightarrow\tan\left(x+15^\circ\right)=\tan 45^\circ\Leftrightarrow x+15^\circ=45^\circ+k.180^\circ\Leftrightarrow x=30^\circ+k.180^\circ\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Với $90^\circ<x<270^\circ\Leftrightarrow 90^\circ<30^\circ+k.180^\circ<270^\circ\Rightarrow k=1\Rightarrow x=210^\circ$.

Câu 2.

Phương trình $\sqrt{3}.\tan x+3=0$ có nghĩa $\Leftrightarrow\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$.

Ta có $\sqrt{3}\tan x+3=0\Leftrightarrow \tan x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow \tan x=\tan\frac{-\pi}{3}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Câu 3.

Phương trình $\tan^2 x=3$ có nghĩa $\Leftrightarrow \cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$.

Ta có $\tan^2 x=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=\sqrt{3}\\ \tan x=-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Xét $\tan x=\sqrt{3}\Leftrightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Xét $\tan x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow \tan x=\tan\frac{-\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{3}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Câu 4.

Phương trình $\tan x=-\tan\frac{\pi}{5}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$.

Ta có $\tan x=-\tan\frac{\pi}{5}\Leftrightarrow \tan x=\tan\frac{-\pi}{5}\Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{5}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Do $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ nên $x=\frac{4\pi}{5}$.

Câu 5.

Ta có $\frac{-\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}\sin 4x\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\sin 4x\right)\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình xác định với $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow D=\mathbb{R}$.

$\tan\left(\frac{\pi}{4}\sin 4x\right)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}\sin 4x=arc\tan\frac{3}{2}+k\pi\Leftrightarrow \sin 4x=\frac{4}{\pi}arc\tan\frac{3}{2}+4k$.

Với $k\ge 0$ thì $\frac{4}{\pi}arc\tan\frac{3}{2}+4k>1\Rightarrow \sin 4x>1$ (vô lí).

Với $k\le -1$ thì $\frac{4}{\pi}arc\tan\frac{3}{2}+4k<-1\Rightarrow \sin 4x<-1$ (vô lí).

Vậy đã cho phương trình vô nghiệm.

Câu 6.

Phương trình $\sqrt{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)-\sqrt{2}=0$ có nghĩa

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\neq 0\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}-2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{-\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\Leftrightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right\}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ta có $\sqrt{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=1\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}-2x=\frac{\pi}{4}-k\pi\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{2}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Dạng 4: Phương trình $\cot x = n$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Giải phương trình $\cot\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$. (1)

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\neq 0 \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, $(k\in\mathbb{Z})$.

$(1)\Leftrightarrow \cot\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cot\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k\pi$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\tan\left(\frac{4\pi}{9}+x\right)+2\cot\left(\frac{\pi}{18}-x\right)=\sqrt{3}$. (2)

Hướng dẫn giải

Điều kiện

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{4\pi}{9}+x\right)\neq 0\\ \sin\left(\frac{\pi}{18}-x\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4\pi}{9}+x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{\pi}{18}-x\neq k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{18}+k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{18}-k\pi\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{18}+k\pi,\ (k;m\in\mathbb{Z}).$$

Ta có $\left(\frac{4\pi}{9}+x\right)+\left(\frac{\pi}{18}-x\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \tan\left(\frac{4\pi}{9}+x\right)=\cot\left(\frac{\pi}{18}-x\right)$.

$(2)\Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{18}-x\right)+2\cot\left(\frac{\pi}{18}-x\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow 3\cot\left(\frac{\pi}{18}-x\right)=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{18}-x\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\frac{\pi}{18}-x=\frac{\pi}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{5\pi}{18}-k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=-\frac{5\pi}{18}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Phương trình $3\cot x-\sqrt{3}=0$ có nghiệm là

A. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

D. Vô nghiệm.

Câu 2: Cho phương trình $\cot\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=m^2-4$, m là tham số. Với giá trị nào của m thì phương trình trên vô nghiệm?

A. $m\neq\pm 2$.

B. $-2<m<2$.

C. $\forall m \in \mathbb{R}$.

D. Không tồn tại giá trị của m.

Câu 3: Phương trình $\cot x.\cot 2x - 1 = 0$ có nghiệm là

A. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

ĐÁP ÁN

1-B	**2-D**	**3-B**							

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Phương trình $3\cot x - \sqrt{3} = 0$ có nghĩa $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có $3\cot x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cot x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 2.

Tập giá trị $y = \cot\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \mathbb{R}$ nên với $\forall m \in \mathbb{R}$ phương trình luôn có nghiệm.

Vậy không tồn tại giá trị m để phương trình vô nghiệm.

Câu 3.

Phương trình $\cot x.\cot 2x - 1 = 0$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ 2x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{x \neq \dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

Ta có $\cot x.\cot 2x - 1 = \dfrac{\cos x}{\sin x}.\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} - 1 = \dfrac{\cos x}{\sin x}.\dfrac{1 - 2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} - 1 = \dfrac{1 - 2\sin^2 x}{2\sin^2 x} - 1 = \dfrac{1}{2\sin^2 x} - 2$.

$$\cot x.\cot 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sin^2 x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin x = \sin\dfrac{-\pi}{6} \end{array}\right..$$

Nếu $\sin x = \sin\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.

Nếu $\sin x = \sin\dfrac{-\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.

Kết hợp nghiệm ta có $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi \end{array}\right.$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.