

GIẢI HHKG BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ HÓA

A - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

Bước 1: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz.

Xác định ba đường thẳng đồng quy và đôi một cắt nhau trên cơ sở có sẵn của hình (như tam diện vuông, hình hộp chữ nhật, hình chóp tứ giác đều ...), hoặc dựa trên các mặt phẳng vuông góc dựng thêm đường phụ.

Bước 2: Tọa độ hóa các điểm của hình không gian.

Tính tọa độ điểm liên quan trực tiếp đến giả thiết và kết luận của bài toán. Cơ sở tính toán chủ yếu dựa vào quan hệ song song, vuông góc cùng các dữ liệu của bài toán.

Bước 3: Chuyển giả thiết qua hình học giải tích.

Lập các phương trình đường, mặt liên quan. Xác định tọa độ các điểm, véc tơ cần thiết cho kết luận.

Bước 4: Giải quyết bài toán.

Sử dụng các kiến thức hình học giải tích để giải quyết yêu cầu của bài toán hình không gian.

Chú ý các công thức về góc, khoảng cách, diện tích và thể tích ...

Cách chọn hệ tọa độ một số hình không gian.

Hình hộp lập phương – Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ **Với hình lập phương .**

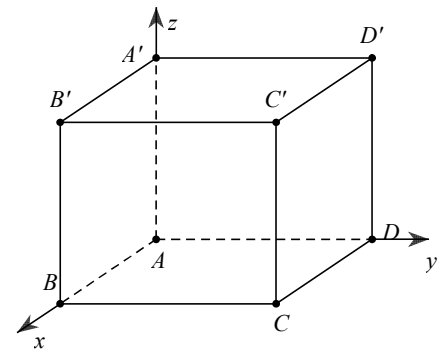
Chọn hệ trục tọa độ sao cho : $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$,

$C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$

$A'(0;0;a)$, $B'(a;0;a)$, $C'(a;a;a)$, $D'(0;a;a)$

Với hình hộp chữ nhật.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:



$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;b;0)$, $D(0;b;0)$, $A'(0;0;c)$; $B'(a;0;c)$; $C'(a;b;c)$; $D'(0;b;c)$

Chú ý: Tam diện vuông là một nửa của hình hộp chữ nhật nên ta chọn hệ trục tọa độ tương tự như hình hộp chữ nhật.

Với hình hộp đứng có đáy là hình thoi $ABCD.A'B'C'D'$

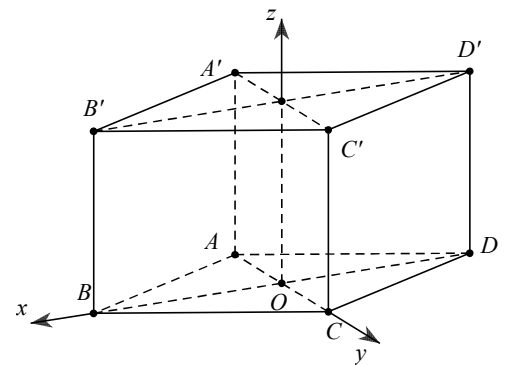
Chọn hệ trục tọa độ sao cho :

Gốc tọa độ trùng với giao điểm O của hai đường chéo của hình thoi $ABCD$

Trục Oz đi qua 2 tâm của 2 đáy

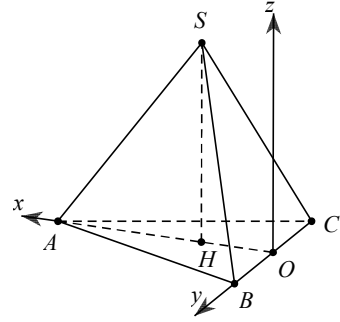
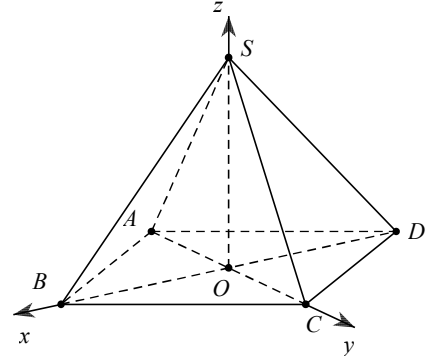
Nếu $AC = a$, $BD = b$, $AA' = c$ thì

$$A\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right), B\left(\frac{b}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$$



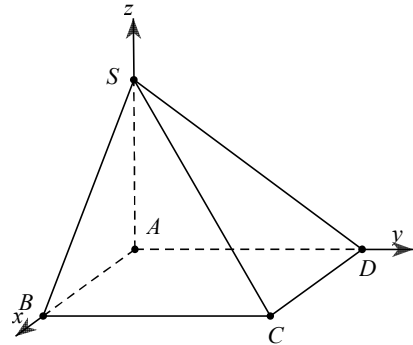
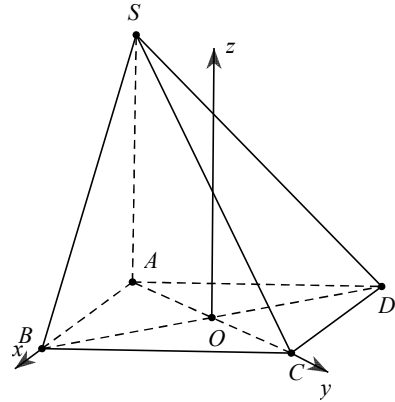
$$D\left(-\frac{b}{2}; 0; 0\right), A'\left(0; -\frac{a}{2}; c\right), B'\left(\frac{b}{2}; 0; c\right), C'\left(0; \frac{a}{2}; c\right), D'\left(-\frac{b}{2}; 0; c\right).$$

Chú ý: Với lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại B thì ta chọn hệ trục tọa độ tương tự như trên với gốc tọa độ là trung điểm AC , $B \in Ox$, $C \in Oy$ còn trục Oz đi qua trung điểm hai cạnh AC , $A'C'$.

Hình chóp đều	
1) Hình chóp tam giác đều $S.ABC$, $AB = a$, $SH = h$, ta chọn hệ tọa độ sao cho O là trung điểm BC, $A \in Ox, B \in Oy$. Khi đó $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$, $C\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right), S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; h\right)$	
Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, $AB = a$, $SH = h$, ta chọn hệ tọa độ sao cho O là tâm đáy $B \in Ox, C \in Oy, S \in Oz$. Khi đó: $A\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), D\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), S(0; 0; h)$	

Chú ý: Ngoài cách chọn hệ trục như trên ta có thể chọn hệ trục bằng cách khác.

Chẳng hạn với hình chóp tam giác đều ta có thể chọn $H \equiv O$, trục Oy đi qua H và song song với BC .

Hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD), SA = h$	
1) Nếu đáy là hình chữ nhật ta chọn hệ trục sao cho $A \equiv O, B \in Ox, D \in Oy, S \in Oz$	
Nếu đáy là hình thoi, ta chọn hệ trục sao cho O là tâm của đáy, $B \in Ox, C \in Oy$ và $Oz \perp SA$.	

Chú ý: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$

- Nếu đáy ABC là tam giác vuông tại A thì cách chọn hệ trục hoàn toàn tương tự như hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật.
- Nếu đáy ABC là tam giác cân tại B thì ta chọn hệ trục tọa độ như hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, khi đó gốc tọa độ là trung điểm cạnh AC .

Hình chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABC)$	
Đường cao $SH = h$ của tam giác SAB là đường cao của hình chóp. Nếu tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $AC = b$ ta chọn hệ trục sao cho $A \equiv O, B \in Oy, C \in Ox$, $Oz \parallel SH$. Khi đó $A(0;0;0), B(0;a;0), C(b;0;0)$ $AH = c \Rightarrow H(0;c;0), S(0;c;h)$.	

Chú ý:

- Nếu vuông tại B ta chọn $B \equiv O$, vuông tại C chọn $C \equiv O$.
- Nếu tam giác ASB cân tại S , $\triangle ABC$ cân tại C thì ta chọn $H \equiv O, C \in Ox, B \in Oy, S \in Oz$

Tùy vào từng bài toán mà có thể thay đổi linh hoạt cách chọn hệ tọa độ. Trong nhiều trường hợp, phải biết kết hợp kiến thức hình không gian tổng hợp và kiến thức hình giải tích nhằm thu gọn lời giải.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = a, OB = b, OC = c$ đôi một vuông góc. Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng cách lần lượt đến các $mp(OBC), mp(OCA), mp(OAB)$ là 1, 2, 3. Tính a, b, c để thể tích $O.ABC$ nhỏ nhất.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có: $O(0;0;0), A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$

Vì khoảng cách từ M đến các mặt phẳng $mp(OBC), mp(OCA), mp(OAB)$ là 1, 2, 3 nên $M(1;2;3)$. Suy ra phương trình

$$(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

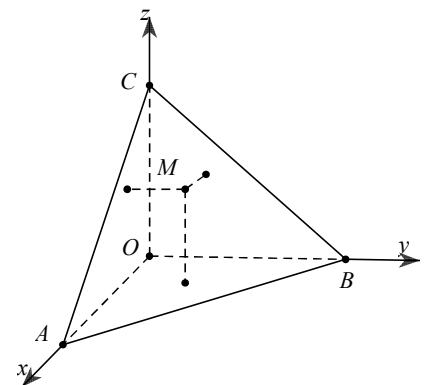
$$\text{Vì } M \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$$

(1). Thể tích khối chóp $O.ABC$:

$$V_{O.ABC} = \frac{1}{6}abc.$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{3}{c}} \Rightarrow \frac{1}{6}abc \geq 27$$

$$\text{Vậy, } \min V_{O.ABC} = 27 \text{ đạt được khi } \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 3, b = 6, c = 9$$



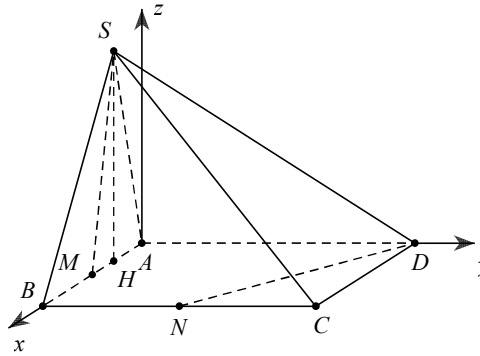
Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S lên $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Ta có: $SA^2 + SB^2 = AB^2 \Rightarrow SA \perp SB \Rightarrow AH = \frac{SA^2}{AB} = \frac{a}{2}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có tọa độ các điểm:



$$A(0; 0; 0), B(2a; 0; 0), D(0; 2a; 0), C(2a; 2a; 0), H\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right), S\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$M(a; 0; 0), N(2a; a; 0).$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ADM} = S_{\triangle CDN} = \frac{1}{2}a \cdot 2a = a^2 \Rightarrow S_{BNDM} = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.BMDN : V = \frac{1}{3}SH \cdot S_{BMDN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{SM} = \left(\frac{a}{2}; 0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{DN} = (2a; -a; 0) \Rightarrow \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DN} = a^2$$

$$\text{Vậy } \cos(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{DN}) = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DN}|}{|\overrightarrow{SM}| \cdot |\overrightarrow{DN}|} = \frac{a^2}{a \cdot \sqrt{5}a} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Ví dụ 3: Trên các tia Ox, Oy, Oz của góc tam diện vuông $Oxyz$ lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $OA = a, OB = a\sqrt{2}, OC = c, (a, c > 0)$. Gọi D là đỉnh đối diện với O của hình chữ nhật $AOBD$ và M là trung điểm của đoạn BC . Mặt phẳng (α) qua A, M cắt mặt phẳng (OCD) theo một đường thẳng vuông góc với đường thẳng AM .

1. Gọi E là giao điểm của (α) với đường thẳng OC . Tính độ dài đoạn thẳng OE ;

2. Tính tỷ số thể tích của hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp $C.AOBD$ bởi mặt phẳng (α) .

Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (α)

Lời giải.

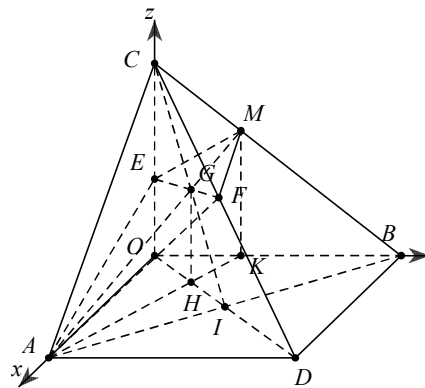
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, sao cho:

$$O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; a\sqrt{2}; 0),$$

$$D(a; a\sqrt{2}; 0), C(0; 0; c)$$

1. Vì M là trung điểm của BC nên

$$M\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{c}{2}\right).$$



$$\overrightarrow{OC}(0; 0; c), \overrightarrow{OD}(a; a\sqrt{2}; 0)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD}] = (-ac\sqrt{2}; ac; 0)$$

Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (OCD) là $\overrightarrow{n_{OCD}} = (-\sqrt{2}; 1; 0)$.

Gọi $F = (\alpha) \cap CD$ thì EF là giao tuyến của (α) với (OCD) , ta có $EF \perp AM$.

Vì $\overrightarrow{AM} = \left(-a; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{c}{2}\right)$ nên $[\overrightarrow{n_{OCD}}, \overrightarrow{AM}] = \frac{c}{2}(1; \sqrt{2}; 0)$, do đó một véc tơ chỉ phương của EF là $\overrightarrow{u_{EF}} = (1; \sqrt{2}; 0)$.

Ta có $[\overrightarrow{u_{EF}}, \overrightarrow{AM}] = \frac{1}{2}(c\sqrt{2}; -c; 3\sqrt{2}a)$ nên phương trình mặt phẳng (α) là :

$$\sqrt{2}cx - cy + 3\sqrt{2}az - ac\sqrt{2} = 0.$$

Do đó $(\alpha) \cap Oz = E\left(0; 0; \frac{c}{3}\right) \Rightarrow OE = \frac{c}{3}$.

2. Ta có $(\alpha) \cap CD = F\left(\frac{2a}{3}; \frac{2\sqrt{2}a}{3}; \frac{c}{3}\right) \Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{2}{3}$.

Mà $V_{COADB} = 2V_{CAOD} = 2V_{CBOD}$ nên

$$\frac{V_{CEAFM}}{V_{COADB}} = \frac{V_{CAEF}}{2V_{CAOD}} + \frac{V_{CMEF}}{2V_{CBOD}} = \frac{1}{2}\left(\frac{CE}{CO} \cdot \frac{CF}{CD} + \frac{CM}{CB} \cdot \frac{CE}{CO} \cdot \frac{CF}{CD}\right) = \frac{1}{3}$$

Do đó tỷ số thể tích hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp $C.AODB$ bởi mặt phẳng (α) là $\frac{1}{2}$ (hay 2).

$$\text{Khoảng cách cần tìm : } d(C, (\alpha)) = \frac{|3\sqrt{2}ac - ac\sqrt{2}|}{\sqrt{2c^2 + c^2 + 18a^2}} = \frac{2\sqrt{6}ac}{3\sqrt{c^2 + 6a^2}}.$$

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có

$A \equiv O, B \in Ox, D \in Oy, A' \in Oz$ và $AB = 1, AD = 2, AA' = 3$.

1. Tìm tọa độ các đỉnh của hình hộp;
2. Tìm điểm E trên đường thẳng DD' sao cho $B'E \perp A'C$
3. Tìm điểm M thuộc $A'C$, N thuộc BD sao cho $MN \perp BD, MN \perp A'C$. Từ đó tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'C$ và BD

Lời giải.

1. Ta có $A(0; 0; 0), B(1; 0; 0),$

$D(0; 2; 0), A'(0; 0; 3)$.

Hình chiếu của C lên (Oxy) là C ,

hình chiếu của C lên Oz là A nên

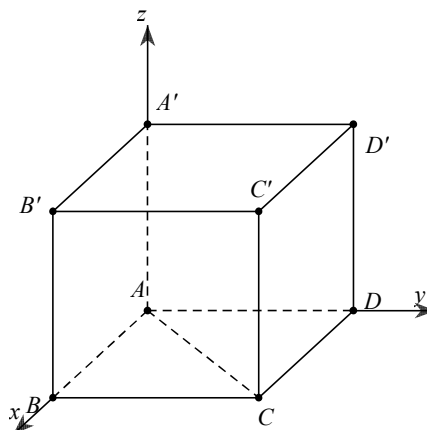
$C(1; 2; 0)$.

Hình chiếu của B', C', D' lên mp

(Oxy) và trục Oz lần lượt là các điểm

B, C, D và A' nên

$B'(1; 0; 3), C'(1; 2; 3), D'(0; 2; 3)$.



2. Vì E thuộc đường thẳng DD' nên $E(0; 2; z)$, suy ra $\overrightarrow{B'E} = (-1; 2; z - 3)$

Mà $\overrightarrow{A'C} = (1; 2; -3)$ nên $B'E \perp A'C \Leftrightarrow \overrightarrow{B'E} \cdot \overrightarrow{A'C} = 0 \Leftrightarrow -1 + 4 - 3(z - 3) = 0 \Leftrightarrow z = 4$.

Vậy $E(0; 2; 4)$.

3. Đặt $\overrightarrow{A'M} = x \cdot \overrightarrow{A'C}$; $\overrightarrow{BN} = y \cdot \overrightarrow{BD}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AA'} + x \cdot \overrightarrow{A'C} = (x; 2x; 3 - 3x)$, suy ra $M(x; 2x; 3 - 3x)$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{BD} = (1 - y; 2y; 0) \Rightarrow N(1 - y; 2y; 0)$

Theo giả thiết của đề bài, ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A'C} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Mà $\overrightarrow{MN} = (1 - x - y; 2y - 2x; 3x - 3)$, $\overrightarrow{A'C} = (1; 2; -3)$, $\overrightarrow{BD} = (-1; 2; 0)$

Khi đó (*) trở thành

$$\begin{cases} 1 - x - y + 4y - 4x - 9x + 9 = 0 \\ -1 + x + y + 4y - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14x + 3y = -10 \\ -3x + 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{53}{61} \\ y = \frac{44}{61} \end{cases}$$

Do đó $M\left(\frac{53}{61}; \frac{106}{61}; \frac{24}{61}\right)$, $N\left(\frac{17}{61}; \frac{88}{61}; 0\right)$.

Vì MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng $A'C, BD$

$$d(A'C, BD) = MN = \sqrt{(1 - x - y)^2 + (2y - 2x)^2 + (3x - 3)^2} = \frac{6\sqrt{61}}{61}.$$

Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a

Lời giải.

Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên suy ra $SA \perp (ABC)$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, đặt $SA = x, x > 0$

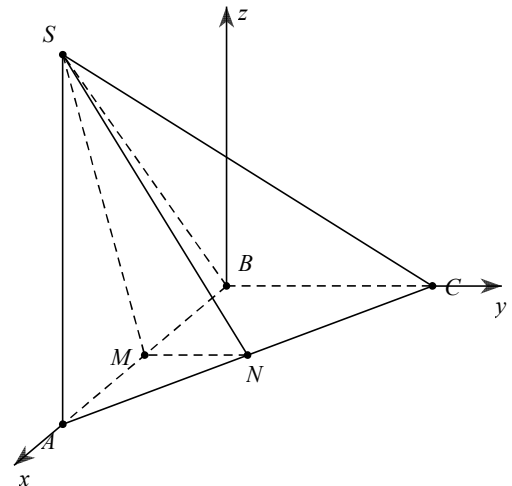
Vì $MN \parallel BC \Rightarrow N$ là trung điểm cạnh AC

Tọa độ các đỉnh là:

$B(0; 0; 0), A(2a; 0; 0),$

$C(0; 2a; 0), S(2a; 0; x),$

$M(a; 0; 0), N(a; a; 0)$



Suy ra $\overrightarrow{BS} = (2a; 0; x), \overrightarrow{BC} = (0; 2a; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BC}] = (-2ax; 0; 4a^2)$

Do đó $\vec{n} = (x; 0; -2a)$ là VTPT của mặt phẳng (SBC)

$\vec{k} = (0; 0; 1)$ là VTPT của mặt phẳng (ABC)

Theo giả thiết ta có: $\frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{x^2 + 4a^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 12a^2 \Rightarrow x = 2a\sqrt{3}$

Vì M, N là trung điểm của AB, CB nên

$$S_{\triangle AMN} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{BMNC} = \frac{3}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{3a^2}{2}$$

Từ đó suy ra thể tích khối chóp $S.BMNC$ là:

$$V_{S.BMNC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{BMNC} = \frac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot \frac{3a^2}{2} = a^3\sqrt{3}.$$

Ta có: $\vec{BA} = (2a; 0; 0), \vec{SN} = (-a; a; 2a\sqrt{3}), \vec{BN} = (a; a; 0)$

Suy ra $[\vec{BA}, \vec{SN}] = (0; -4\sqrt{3}a^2; 2a^2) \Rightarrow [\vec{BA}, \vec{SN}] \cdot \vec{BN} = -4\sqrt{3}a^3$

$$\text{Vậy } d(AB, SN) = \frac{|[\vec{BA}, \vec{SN}] \cdot \vec{BN}|}{|[\vec{BA}, \vec{SN}]|} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}a^2} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

B - BÀI TẬP

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; M, N hai điểm nằm trên hai cạnh BC, CD . Đặt $BM = x, DN = y$ ($0 < x, y < a$).

Hệ thức liên hệ giữa x và y để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau là:

A. $x^2 + a^2 = a(x + y).$

B. $x^2 + 2a^2 = a(x + y).$

C. $2x^2 + a^2 = a(x + y).$

D. $x^2 + a^2 = a(x + 2y).$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là trung điểm của AM . Biết $HB = HC, \widehat{HBC} = 30^\circ$; góc giữa mặt phẳng (SHC) và mặt phẳng (HBC) bằng 60° . Tính cosin của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SHC) ?

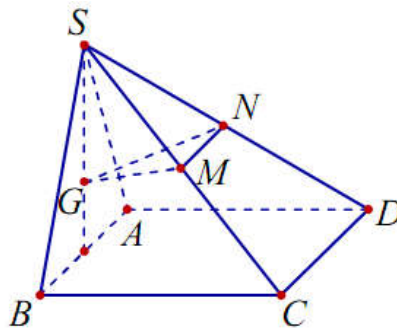
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

B. $\frac{\sqrt{13}}{4}.$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}.$

D. $\frac{1}{2}.$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.



A. $\frac{2\sqrt{39}}{13}.$

B. $\frac{\sqrt{13}}{13}.$

C. $\frac{2\sqrt{39}}{39}.$

D. $\frac{\sqrt{3}}{6}.$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $BC = 2a$. Gọi D là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{SB} = 2\overrightarrow{SD}$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc đoạn BC sao cho $BC = 4BH$. Biết SA tạo với đáy một góc 60° . Góc giữa hai đường thẳng AD và SC bằng

- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Lấy điểm M thuộc đoạn AD' , điểm N thuộc đoạn BD sao cho $AM = DN = x$, $\left(0 < x < \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. Tìm x theo a để đoạn MN ngắn nhất.

- A. $x = \frac{a}{2}$. B. $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. C. $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. D. $x = \frac{a}{3}$.

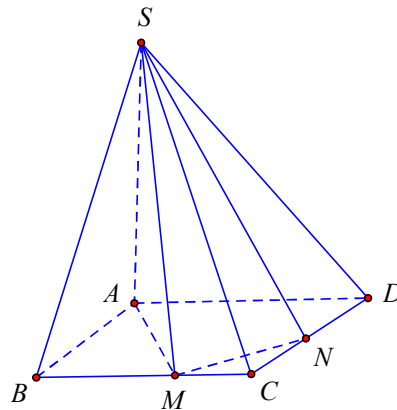
C – HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; M, N hai điểm nằm trên hai cạnh BC, CD . Đặt $BM = x$, $DN = y$ ($0 < x, y < a$). Hệ thức liên hệ giữa x và y để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau là:

- A. $x^2 + a^2 = a(x + y)$. B. $x^2 + 2a^2 = a(x + y)$.
C. $2x^2 + a^2 = a(x + y)$. D. $x^2 + a^2 = a(x + 2y)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Tọa độ hóa với $O \equiv A$, $Ox \equiv AD$, $Oy \equiv AB$, $Oz \equiv AS$.

Đặt $SA = z > 0$, ta có $S(0; 0; z)$, $M(x; a; 0)$, $N(a; y; 0)$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} \overrightarrow{AS} = (0; 0; z) \\ \overrightarrow{AM} = (x; a; 0) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AS}; \overrightarrow{AM}] = (-az; xz; 0).$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{SM} = (x; a; -z) \\ \overrightarrow{SN} = (a; y; -z) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{SM}; \overrightarrow{SN}] = (yz - az; xz - az; xy - a^2).$$

Mặt phẳng (SAM) nhận $[\overrightarrow{AS}; \overrightarrow{AM}] = (-az; xz; 0)$ là một VTPT.

Mặt phẳng (SMN) nhận $[\overrightarrow{SM}; \overrightarrow{SN}] = (yz - az; xz - az; xy - a^2)$ là một VTPT.

$$\text{Ta có } (SAM) \perp (SMN) \Leftrightarrow [\overrightarrow{AS}; \overrightarrow{AM}] \cdot [\overrightarrow{SM}; \overrightarrow{SN}] = 0$$

$$\Leftrightarrow az(az - yz) + xz(xz - az) = 0 \Leftrightarrow a(a - y) + x(x - a) = 0 \Leftrightarrow x^2 + a^2 = a(x + y).$$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là trung điểm của AM . Biết $HB = HC$, $\widehat{HBC} = 30^\circ$; góc giữa mặt phẳng (SHC) và mặt phẳng (HBC) bằng 60° . Tính cosin của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SHC) ?

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{13}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

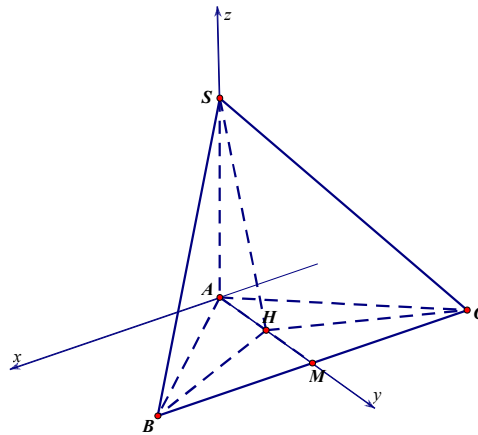
Hướng dẫn giải

Chọn B

Từ M là trung điểm của BC và H là trung điểm của AM , $HB = HC$ suy ra $AM \perp BC$, hay tam giác ABC cân đỉnh A .

Đặt $BC = a \Rightarrow BM = \frac{a}{2}$. Do $\widehat{HBC} = 30^\circ$ suy ra $HM = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Đặt $SA = b$.

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta có $A(0;0;0)$, $B\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{3}; 0\right)$, $C\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{3}; 0\right)$; $H\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right)$, $S(0;0;b)$.

Ta có $\overrightarrow{HC} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right)$; $\overrightarrow{SH} = \left(0; \frac{a\sqrt{3}}{6}; -b\right)$.

Nên $[\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{SH}] = \left(-\frac{ab\sqrt{3}}{6}; -\frac{ab}{2}; -\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\right)$.

Suy ra (SHC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (2b\sqrt{3}; 6b; a\sqrt{3})$.

Mặt phẳng (HBC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Góc giữa mặt phẳng (SHC) và mặt phẳng (HBC) bằng 60° nên

$$\cos((SHC), (HBC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{k}|} \Leftrightarrow \cos 60^\circ = \frac{|a\sqrt{3}|}{\sqrt{12b^2 + 36b^2 + 3a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{12b^2 + 36b^2 + 3a^2} = 2|a\sqrt{3}| \Leftrightarrow b = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

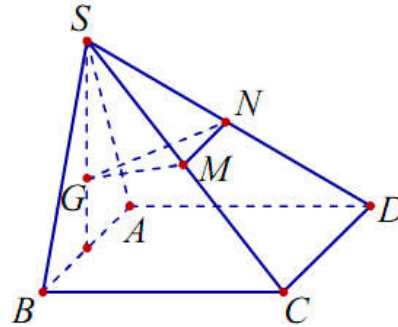
Khi đó $\vec{n}_1 = \left(\frac{3a}{2}; \frac{3a\sqrt{3}}{2}; a\sqrt{3}\right)$, đường thẳng BC có véc-tơ chỉ phương $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SHC) , ta có

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{i}|} = \frac{\left| \frac{3a}{2} \right|}{\sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{27a^2}{4} + 3a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Do đó } \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.



A. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

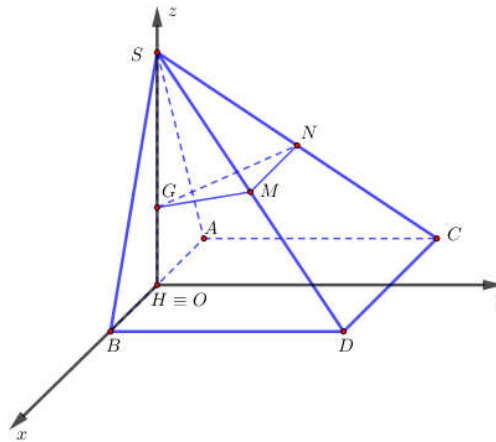
B. $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

C. $\frac{2\sqrt{39}}{39}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

$$S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right); A\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right); B\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right); C\left(\frac{a}{2}; a; 0\right); D\left(-\frac{a}{2}; a; 0\right)$$

$$\text{suy ra } G\left(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right); M\left(\frac{a}{4}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right); N\left(-\frac{a}{4}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

Ta có mặt phẳng $(ABCD)$ có vector pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$, mặt phẳng (GMN) có vector pháp

$$\text{tuyến là } \vec{n} = [\overrightarrow{GM}; \overrightarrow{GN}] = \left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{24}; \frac{a}{4}\right)$$

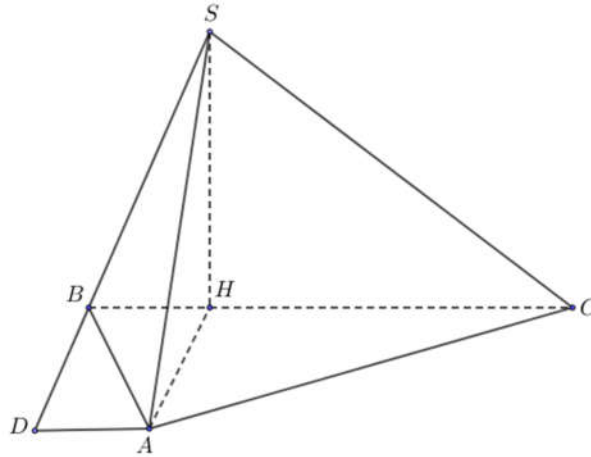
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$, ta có

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{39}}{24}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $BC = 2a$. Gọi D là điểm thỏa mãn $3\vec{SB} = 2\vec{SD}$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc đoạn BC sao cho $BC = 4BH$. Biết SA tạo với đáy một góc 60° . Góc giữa hai đường thẳng AD và SC bằng
- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Hướng dẫn giải

Chọn A



$$\text{Ta có } AH^2 = BH^2 + BA^2 - 2 \cdot BH \cdot BA \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{4} + a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\tan 60^\circ = \frac{SH}{AH} \Rightarrow SH = AH \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}.$$

Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $H(0;0;0)$, $C\left(\frac{3}{2};0;0\right)$, $A\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $S\left(0;0;\frac{3}{2}\right)$,

$$B\left(-\frac{1}{2};0;0\right), \vec{SB} = \left(-\frac{1}{2};0;-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \vec{SD} = \left(-\frac{3}{4};0;-\frac{9}{4}\right) \Rightarrow D\left(-\frac{3}{4};0;-\frac{3}{4}\right).$$

Ta có $\vec{DA} = \left(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \vec{u} = (\sqrt{3};2;\sqrt{3})$ là một vtcp của AD .

$$\vec{SC} = \left(\frac{3}{2};0;-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \vec{v} = (1;0;-1) \text{ là một vtcp của } SC. \text{ Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow AD \perp SC$$

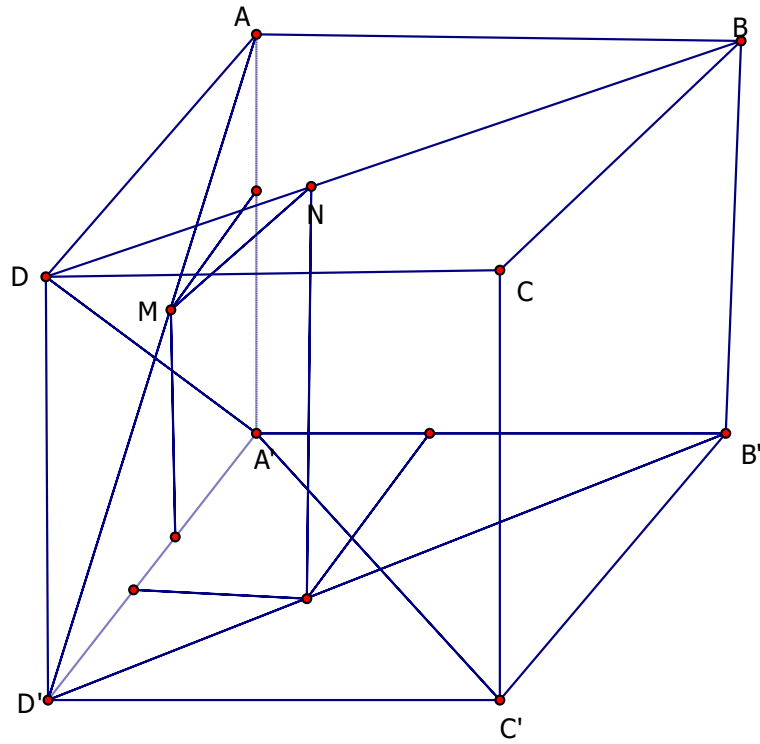
Vậy góc giữa hai đường thẳng AD và SC bằng 90° .

- Câu 5:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Lấy điểm M thuộc đoạn AD' , điểm N thuộc đoạn BD sao cho $AM = DN = x$, $\left(0 < x < \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. Tìm x theo a để đoạn MN ngắn nhất.

- A. $x = \frac{a}{2}$. B. $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. C. $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. D. $x = \frac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A'$, $A'D' \equiv Ox$, $A'B' \equiv Oy$, $A'A \equiv Oz$.

$A'(0;0;0)$, $D'(a;0;0)$, $B'(0;a;0)$, $A(0;0;a)$, $D(a;0;a)$, $B(0;a;a)$, $C'(a;a;0)$, $C(a;a;a)$.

$$M\left(\frac{x}{\sqrt{2}}; 0; \frac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}\right), N\left(\frac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}; \frac{x}{\sqrt{2}}; a\right).$$

$$\Rightarrow MN^2 = (\sqrt{2}x - a)^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = 3x^2 - 2\sqrt{2}ax + a^2 = 3\left(x^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{3}ax + \frac{2a^2}{9}\right) + \frac{a^2}{3}.$$

$$\Rightarrow MN^2 = 3\left(x - \frac{\sqrt{2}a}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3}. \text{ Vậy } MN \text{ ngắn nhất } \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$