CHUYÊN ĐỀ CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A-CÁC DẠNG TOÁN TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Dạng 1: Góc giữa hai đường thẳng

1. Phương pháp

Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 có véctơ chỉ phương $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$ và $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$.

$$\cos(d_1,d_2)=\left|\cos(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\right|=\frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

2. Ví dụ: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\y=5-2t\\z=14-3t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1-4t'\\y=2+t'\\z=-1+5t'\end{cases}$.

Tính góc giữa hai đường thẳng đã cho.

Lời giải

Đường thẳng d_1 có một VTCP $\vec{u}_1=(1;-2;-3)$.

Đường thẳng d_2 có một VTCP $\vec{u}_2=(-4;1;5)$.

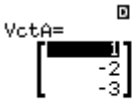
Ta có:

$$\cos(d_1,d_2)=\frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|}=\frac{|1.(-4)+(-2).1+(-3).5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}.\sqrt{(-4)^2+1^2+5^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow(d_1,d_2)=30^o$$

Hướng dẫn Casio fx-580 VNX

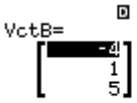
Chuyển máy tính về đơn vị Độ

Nhập $\vec{u}_1=(1;-2;-3)$: MENU 5 1 3



1

Nhập $\vec{u}_2=(-4;1;5)$: MENU 5 2 3



-4

Nhấn **AC**

Góc giữa hai vecto

OPTN ↓ 3

Angle(VctA, VctB)
150
180−Ans
30

Dạng 2: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

1. Phương pháp

Góc giữa đường thẳng d có véctơ chỉ phương $\vec{u}_d=(a;b;c)$ và mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(A;B;C)$ được xác định bởi công thức:

$$\sin\left(d,(P)\right)=\left|\cos(\vec{n}_{(P)},\vec{u}_d)\right|=\frac{\left|\vec{u}_d.\vec{n}_{(P)}\right|}{\left|\vec{u}_d\right|.\left|\vec{n}_{(P)}\right|}=\frac{\left|aA+bB+cC\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x+y+z-1=0$. Tính góc giữa Δ và (P)

Lời giải

Đường thẳng Δ có một VTCP $\vec{u}=(1;2;-1)$.

Mặt phẳng (P) có một VTPT $\vec{n}=(2;1;1)$.

Ta có: $\sin\left(\Delta,(P)\right)=\frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|1.2+2.1+(-1).1\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}.\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\Delta,(P)\right)=30^o$

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $-\sqrt{3}x+y+1=0$. Tính góc tạo bởi (P) với trục Ox?

Lời giải

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(-\sqrt{3};1;0)$

Trục Ox có VTCP $\vec{i}=(1;0;0)$

Góc tạo bởi (P) với trục Ox

$$\sin((\mathrm{P}),Ox)=\left|\cos((\mathrm{P}),Ox)\right|=\frac{\left|\vec{n}.\vec{i}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{i}\right|}=\frac{\left|-\sqrt{3}.1+1.0+0.0\right|}{\sqrt{3+1}.\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy góc tạo bởi (P) với trục Ox bằng 60^0.

Dạng 3: Góc giữa hai mặt phẳng

1. Phương pháp

Góc giữa hai véctơ

Cho hai véctơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Khi đó góc giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc nhọn hoặc tù.

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$ *với* $0°<\alpha<180°$.

Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P):A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(Q):A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

$$\cos\left((P),(Q)\right)=\left|\cos\left(\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right)\right|=\frac{\left|\vec{n}_P.\vec{n}_Q\right|}{\left|\vec{n}_P\right|.\left|\vec{n}_Q\right|}=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+z+10=0$ và $(Q): -x+y+2z+13=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n}_1=(1;2;1)$.

Mặt phẳng (Q) có một VTPT là $\vec{n}_2=(-1;1;2)$.

Ta có:

$$\cos((P),(Q))=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\frac{|1.(-1)+2.1+1.2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}.\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow((P),(Q))=60^o$$

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;1;2)$, H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P), số đo góc giữa mặt (P) và mặt phẳng $(Q): x+y-11=0$

Lời giải

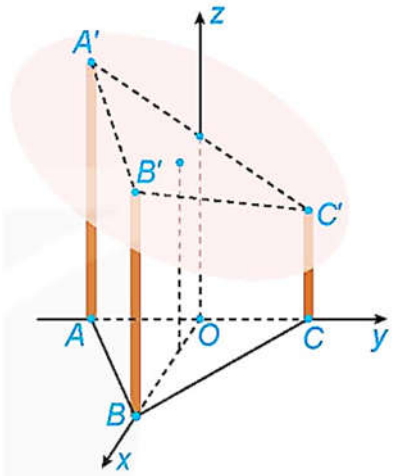
(P) qua O và nhận $\overrightarrow{OH}=(2;1;2)$ làm VTPT

$(Q): x-y-11=0$ có VTPT $\vec{n}=(1;1;0)$

Ta có $\cos((P),(Q))=\frac{|\overrightarrow{OH}.\vec{n}|}{OH.|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow((P),(Q))=45^0$

Dạng 4: Toán thực tế

Ví dụ : Một mái nhà hình tròn được đặt trên ba cây cột trụ (H.5.33). Các cây cột vuông góc với mặt sàn nhà phẳng và có độ cao lần lượt là 7 m, 6 m, 5 m. Ba chân cột là ba đỉnh của một tam giác đều trên mặt sàn nhà với cạnh dài 4 m. Hỏi mái nhà nghiêng với mặt sàn nhà một góc bao nhiêu độ?



Hình 5.33

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, O là trung điểm của AC.

Ta có: $A(0;-2;0), B(2\sqrt{3};0;0), C(0;2;0), A'(0;-2;7), B'(2\sqrt{3};0;6), C'(0;2;5)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{3};2;0), \overrightarrow{AC}=(0;4;0), \overrightarrow{A'B'}=(2\sqrt{3};2;-1), \overrightarrow{A'C'}=(0;4;-2)$

$$\text{Có}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}2&0\\4&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&2\sqrt{3}\\0&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2\sqrt{3}&2\\0&4\end{vmatrix}\right)=\left(0;0;8\sqrt{3}\right)$$

$$\left[\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right]=\left(\begin{vmatrix}2&-1\\4&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&2\sqrt{3}\\-2&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2\sqrt{3}&2\\0&4\end{vmatrix}\right)=\left(0;4\sqrt{3};8\sqrt{3}\right)$$

Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\frac{1}{8\sqrt{3}}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;0;1)$

Mặt phẳng ($A'B'C'$) có một vectơ pháp tuyến là $\frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right]=(0;1;2)$

Do đó $\cos\left((ABC),(A'B'C')\right)=\frac{|2|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow\left((ABC),(A'B'C')\right)\approx 26,6^\circ$.

Suy ra mái nhà nghiêng với mặt sàn nhà một góc khoảng $26,6^\circ$.

B. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=5-2t\\y=5+3t\\z=2t\end{cases}$, $\Delta_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-6}{4}$. Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng

A. 30^o. **B.** 90^o. **C.** 60^o **D.** 45^o.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ và $d_2:\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=6+5t\\y=2+t\\z=1\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+1=0$. Góc hợp bởi giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x-y-z-3=0$ và $(Q):x-z-2=0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;1;0)$ và $P(0;0;1)$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

C. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{3}$, $d_2:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{3}$ và các vectơ $\vec{u}_1=(2;-1;3),\vec{u}_2=(1;2;3)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Đường thẳng d_1 nhận vectơ $\vec{u}_1=(2;-1;3)$ làm vectơ chỉ phương, đường thẳng d_2 nhận vectơ $\vec{u}_2=(1;2;3)$ làm vectơ chỉ phương.

b) Hai vectơ $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ có cùng độ dài.

c) Hai đường thẳng d_1,d_2 là hai đường thẳng vuông góc.

d) Góc giữa hai đường thẳng d_1,d_2 nằm trong khoảng $(40^0;50^0)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z-1=0$, $(\beta):x-y-z+3=0$ và các vectơ $\vec{n}_1=(2;-2;1),\vec{n}_2=(-1;1;1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Mặt phẳng (α) nhận vectơ $\vec{n}_1$ làm vectơ pháp tuyến, mặt phẳng (β) nhận vectơ $\vec{n}_2$ làm vectơ pháp tuyến.

b) Hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ cắt nhau.

c) Hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ là hai mặt phẳng vuông góc.

d) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ thì $\sin\varphi=\dfrac{2}{3}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-4=0$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2-2t\\z=3-t\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Mặt phẳng (α) nhận vectơ $\vec{n}=(1;1;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

b) Đường thẳng d nhận $\vec{u}=(1;2;1)$ làm vectơ chỉ phương.

c) Đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) tại điểm có hoành độ bằng 2.

d) Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 4: Trong không gian Oxyz, Cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+y-2z+1=0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;2;-1)$.

b) Điểm $M(1;1;-2)$ thuộc mặt phẳng (P).

c) Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là 30^0.

d) Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó $T=2\sin^2\alpha-3=7$.

D. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $ax+by+cz-1=0$ với $c<0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc $60°$. Tính $a+b+c$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: $0,59$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x-y+2z+5=0$ và $(Q):x-y+2=0$. Trên (P) có tam giác ABC; Gọi A',B',C' lần lượt là hình chiếu của A,B,C trên (Q). Biết tam giác ABC có diện tích bằng 4, tính diện tích tam giác $A'B'C'$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: $2,83$

Câu 3: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):4x+3y-z+1=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-6}{3}=\dfrac{z+4}{1}$, sin của góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: $0,92$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha):x-y+2z=0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Trả lời: 30

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$, $d_2:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1 tạo với d_2 một góc 45^0 và nhận vectơ $\vec{n}=(1;b;c)$ làm một vectơ pháp tuyến. Xác định tích bc.

Lời giải

Trả lời: -4

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua O, thuộc mặt phẳng (Oyz) và cách điểm $M(1;-2;1)$ một khoảng nhỏ nhất. Côsin của góc giữa d và trục tung bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: $0,89$

---HẾT---