

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN ĐI QUA BA ĐIỂM TRONG MẶT PHẪNG OXY

Tác giả: Danh Anh Võ

1. Phân tích cách viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm trong SGK

KNTTVCS và CTST: Viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(3;6)$, $B(2;3)$ và $C(6;5)$.

Giải

Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Ta có $M\left(\frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right)$, $N\left(\frac{9}{2}; \frac{11}{2}\right)$.

Đường trung trực Δ_1 của đoạn thẳng AB là đường thẳng đi qua M và nhận $\overrightarrow{BA} = (1;3)$ làm vector pháp tuyến, nên có phương trình: $x + 3y - 16 = 0$.

Đường trung trực Δ_2 của đoạn thẳng AC là đường thẳng đi qua N và nhận $\overrightarrow{AC} = (3;-1)$ làm vector pháp tuyến, nên có phương trình: $3x - y - 8 = 0$.

Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm $I(4;4)$ cách đều A, B, C , suy ra đường tròn (C) có tâm $I(4;4)$ và có bán kính $R = IA = \sqrt{5}$. Vậy (C) có phương trình: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Phương pháp:

Bước 1: Tìm M , N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, AC .

Bước 2: Viết phương trình đường trung trực Δ_1 đi qua M và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vector pháp tuyến.

Bước 3: Viết phương trình đường trung trực Δ_2 đi qua N và nhận $\overrightarrow{AC}$ làm vector pháp tuyến.

Bước 3: Tìm giao điểm $I(a,b)$ của Δ_1 và Δ_2 . Suy ra tâm của đường tròn cần tìm là $I(a,b)$.

Bước 4: Tìm bán kính $R = IA = |\overrightarrow{IA}|$.

Bước 5: Thế tọa độ tâm $I(a,b)$, bán kính R vào công thức $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ ta được phương trình đường tròn (C) .

Kiến thức:

- Trung điểm của một đoạn thẳng.
- Phương trình tổng quát của đường thẳng có điểm đi qua và có vector pháp tuyến.
- Giao điểm của hai đường thẳng.
- Khoảng cách giữa hai điểm trong mặt phẳng tọa độ.
- Phương trình đường tròn $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Giải:

- Trung điểm M của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow M : \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$.
- Phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$ có dạng: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

- Giao điểm của hai đường thẳng $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases}$.
- Khoảng cách giữa hai điểm trong mặt phẳng tọa độ.
- Phương trình đường tròn $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.
- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của hai đường trung trực.

Note:

Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm dựa vào công thức $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ không viết theo công thức $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $c = a^2 + b^2 - R^2$.

Cảnh điều:

Ví dụ 4 Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm

$A(-1; 1), B(0; -2), C(0; 2)$.

Giải

Giả sử tâm của đường tròn là điểm $I(a; b)$. Ta có $IA = IB = IC \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = IC^2$.

Vì $IA^2 = IB^2, IB^2 = IC^2$ nên

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (-1-a)^2 + (1-b)^2 = (0-a)^2 + (-2-b)^2 \\ (0-a)^2 + (-2-b)^2 = (0-a)^2 + (2-b)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a^2 + b^2 + 2a - 2b + 2 = a^2 + b^2 + 4b + 4 \\ a^2 + b^2 + 4b + 4 = a^2 + b^2 - 4b + 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2a - 2b = 4b + 2 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

3 Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(1; 2), B(5; 2), C(1; -3)$.

Đường tròn tâm $I(1; 0)$ bán kính $R = IC = \sqrt{a^2 + b^2 - 4b + 4} = \sqrt{5}$.

Phương trình đường tròn là $(x-1)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{5})^2$.

Vậy phương trình đường tròn là $(x-1)^2 + y^2 = 5$.

2. Các ví dụ và các cách giải

Bài toán 1: Viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(0;1), B(8;1)$ và $C(4;-1)$.

Bài toán 2: Viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(4;-5), B(2;-1)$ và $C(3;-8)$ bằng nhiều cách.

Bài toán 3: Viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(3;6), B(2;3)$ và $C(6;5)$ bằng cách giải hệ phương trình ba ẩn ba phương trình.

Hướng 1: Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác bằng cách tìm giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh trong tam giác. Tìm bán kính đường tròn bằng cách tính khoảng cách từ tâm đến điểm nằm trên đường tròn (A, B, C tùy chọn).

Hướng 2: Từ phương trình khai triển của đường tròn (C) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ ($a^2 + b^2 - c > 0$) lần lượt thế các tọa độ của các điểm A, B, C để có được hệ phương trình bậc nhất ba ẩn. Giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn để tìm a, b, c .

Lời giải bài toán 1:

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Ta có $M(4;1), N(2;0)$.

Đường trung trực Δ_1 của đoạn thẳng AB là đường thẳng đi qua $M(4;1)$ và nhận $\overrightarrow{AB}(8,0)$ làm vector pháp tuyến, nên có phương trình: $x - 4 = 0$.

Đường trung trực Δ_2 của đoạn thẳng AC là đường thẳng đi qua $N(2;0)$ và nhận $\overrightarrow{AC}(4;-2)$ làm vector pháp tuyến, nên có phương trình: $-2x + y + 4 = 0$

Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm $I(4;4)$ cách đều A, B, C , suy ra đường tròn (C) có tâm $I(4;4)$ và có bán kính $R = IA = 5$. Vậy (C) có phương trình: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 25$.

Lời giải bài toán 2:

Cách 1: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Ta có $M(3;-3), N\left(\frac{7}{2}; -\frac{13}{2}\right)$

Đường trung trực Δ_1 của đoạn thẳng AB là đường thẳng đi qua $M(3;-3)$ và nhận $\overrightarrow{AB}(-2;4)$ làm vector pháp tuyến, nên có phương trình: $x - 2y - 9 = 0$.

Đường trung trực Δ_2 của đoạn thẳng AC là đường thẳng đi qua $N\left(\frac{7}{2}; -\frac{13}{2}\right)$ và nhận $\overrightarrow{AC} = (-1;-3)$ làm vector pháp tuyến, nên có phương trình: $-x - 3y - 16 = 0$

Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm $I(-1;-5)$ cách đều A, B, C , suy ra đường tròn (C) có tâm $I(-1;-5)$ và có bán kính $R = IA = 5$. Vậy (C) có phương trình: $(x+1)^2 + (y+5)^2 = 25$.

Cách 2: Giả sử phương trình đường tròn (C) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ ($a^2 + b^2 - c > 0$).

Vì $A(4;-5) \in (C)$ nên $-8a + 10b + c = -41$

Vì $B(2;-1) \in (C)$ nên $-4a + 2b + c = -5$

Vì $C(3;-8) \in (C)$ nên $-6a + 16b + c = -73$

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} -8a + 10b + c = -41 \\ -4a + 2b + c = -5 \\ -6a + 16b + c = -73 \end{cases} \text{ ta được } \begin{cases} a = -1 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

Vậy $(C): x^2 + y^2 + 2x + 10y + 1 = 0$.

Lời giải bài toán 3:

Giả sử phương trình đường tròn (C) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ ($a^2 + b^2 - c > 0$).

Vì $A(3;6) \in (C)$ nên $-6a - 12b + c = -45$

Vì $B(2;3) \in (C)$ nên $-4a - 6b + c = -13$

Vì $C(6;5) \in (C)$ nên $-12a - 10b + c = -61$

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} -6a - 12b + c = -45 \\ -4a - 6b + c = -13 \\ -12a - 10b + c = -61 \end{cases} \text{ ta được } \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \\ c = 27 \end{cases}$$

Vậy $(C): x^2 + y^2 - 8x - 8y + 27 = 0$.