

CHUYÊN ĐỀ: DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

1. TAM THỨC BẬC HAI

- **Đặt vấn đề:** Hãy chỉ ra một đặc điểm chung của các biểu thức dưới đây?

$$A = 0,5x^2; \quad B = 1 - x^2; \quad C = x^2 + x + 1; \quad D = (1 - x)(2x + 1).$$

- **Hướng dẫn:** Đặc điểm chung là bậc của các đa thức trên đều bằng 2.

- Giới thiệu định nghĩa *Tam thức bậc hai*:

Tam thức bậc hai (đối với x) là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ trong đó các số a, b, c là các hệ số của tam thức và $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

- **Luyện tập 1:** Hãy cho biết biểu thức nào sau đây là tam thức bậc hai.

$$A = 3x + 2\sqrt{x} + 1; \quad B = -5x^4 + 3x^2 + 4; \quad C = -\frac{2}{3}x^2 + 7x - 4; \quad D = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\frac{1}{x} + 3.$$

Hướng dẫn: Theo định nghĩa Tam thức bậc hai, ta có biểu thức $C = -\frac{2}{3}x^2 + 7x - 4$ là tam thức bậc hai, với $a = -\frac{2}{3}; b = 7; c = -4$.

Chú ý: Nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ cũng được gọi là nghiệm của tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = b'^2 - ac$, với $b = 2b'$ tương ứng được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$.

- **Yêu cầu hs:** Nhắc lại cách tìm nghiệm của phương trình bậc 2?

- **Hướng dẫn:** HS nhắc lại các trường hợp nghiệm của phương trình bậc 2 ứng với ba trường hợp của biệt thức Delta. Hoặc sử dụng máy tính.

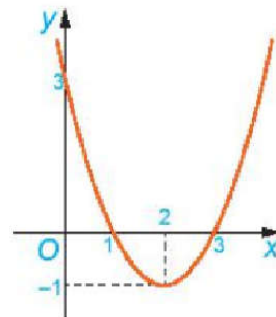
2. ĐỊNH LÝ VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

HD2: Cho hàm số bậc hai $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$.

a) Xác định hệ số a . Tính $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ và nhận xét về dấu của chúng so với dấu của hệ số a .

b) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ (H.6.17). Xét trên từng khoảng $(-\infty; 1), (1; 3), (3; +\infty)$, đồ thị nằm phía trên hay nằm phía dưới trục Ox ?

c) Nhận xét về dấu của $f(x)$ và dấu của hệ số a trên từng khoảng đó.



Hình 6.17

Hướng dẫn:

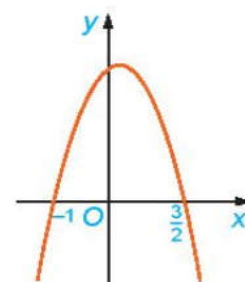
a) Hệ số $a = 1; f(0) = 3, f(1) = 0, f(2) = -1, f(3) = 0, f(4) = 3$

Dấu của $f(0)$, $f(4)$ cùng dấu với dấu của hệ số a ; dấu của $f(2)$ trái dấu với dấu của hệ số a .

b) Trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$ đồ thị hàm số nằm phía trên trục Ox ; trên khoảng $(1; 3)$ đồ thị hàm số nằm phía dưới trục Ox .

c) Trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$ dấu của $f(x)$ cùng dấu với dấu của hệ số a ; trên khoảng $(1; 3)$ dấu của $f(x)$ trái dấu với dấu của hệ số a .

HĐ3: Cho đồ thị hàm số $y = g(x) = -2x^2 + x + 3$ như Hình 6.18



Hình 6.18

a) Xét trên từng khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}; +\infty)$, đồ thị nằm phía trên hay nằm phía dưới trục Ox ?

b) Nhận xét về dấu của $g(x)$ và dấu của hệ số a trên từng khoảng đó.

Hướng dẫn:

a) Trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(\frac{3}{2}; +\infty)$ đồ thị hàm số nằm phía dưới trục

Ox ; trên khoảng $(-1; \frac{3}{2})$ đồ thị hàm số nằm phía trên trục Ox .

b) Trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(\frac{3}{2}; +\infty)$ dấu của $g(x)$ cùng dấu với dấu của hệ số a ; trên khoảng $(-1; \frac{3}{2})$ dấu của $g(x)$ trái dấu với dấu của hệ số a .

Nhận xét: Từ HĐ2 và HĐ3 ta thấy, nếu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2 (x_1 < x_2)$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi giá trị $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ (ở ngoài khoảng hai nghiệm) và trái dấu với hệ số a với mọi giá trị $x \in (x_1; x_2)$ (ở trong khoảng hai nghiệm).

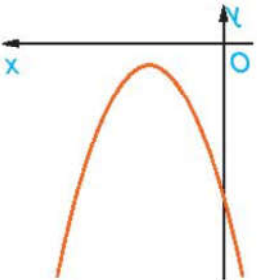
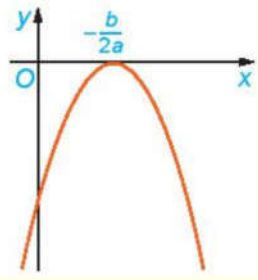
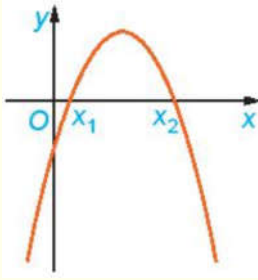
HĐ4: Nêu nội dung thay vào ô có dấu “?” trong bảng sau cho thích hợp.

• Trường hợp $a > 0$

Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Dạng đồ thị			

Vị trí của đồ thị so với trục Ox	Đồ thị nằm hoàn toàn phía trên trục Ox	Đồ thị nằm phía trên trục Ox và tiếp xúc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x = -\frac{b}{2a}$	- Đồ thị nằm phía trên trục Ox khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$. - Đồ thị nằm phía dưới trục Ox khi $x_1 < x < x_2$.
------------------------------------	--	---	---

• Trường hợp $a < 0$

Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Dạng đồ thị			
Vị trí của đồ thị so với trục Ox	Đồ thị nằm hoàn toàn phía dưới trục Ox	Đồ thị nằm phía dưới trục Ox và tiếp xúc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x = -\frac{b}{2a}$	- Đồ thị nằm phía trên trục Ox khi $x_1 < x < x_2$. - Đồ thị nằm phía dưới trục Ox khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.

- Giới thiệu: Định lý về dấu tam thức bậc hai

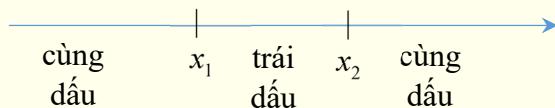
Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$).

Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$ và $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.

Nếu $\Delta > 0$ thì tam thức $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 ($x_1 < x_2$). Khi đó, $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi $x \in (x_1; x_2)$.

Khi $\Delta > 0$, dấu của $f(x)$ và a là: “Trong trái ngoài cùng”



Chú ý. Trong định lý về dấu tam thức bậc hai có thể thay Δ bởi Δ' .

VÍ DỤ: Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

a) $x^2 + x + 1$; b) $-\frac{3}{2}x^2 + 9x - 27$; c) $2x^2 + 6x - 8$.

Giải

a) $f(x) = x^2 + x + 1$ có $\Delta = -3 < 0$ và $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 9x - \frac{27}{2}$ có $\Delta = 0$ và $a = -\frac{3}{2} < 0$ nên $g(x)$ có nghiệm kép $x = 3$ và $g(x) < 0$ với mọi $x \neq 3$.

c) Dễ thấy $h(x) = 2x^2 + 6x - 8$ có $\Delta' = 25 > 0, a = 2 > 0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -4; x_2 = 1$.
Do đó ta có bảng xét dấu $h(x)$:

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
$h(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra $h(x) > 0$ với mọi $x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$ và $h(x) < 0$ với mọi $x \in (-4; 1)$.

Luyện tập 2. Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

a) $-3x^2 + x - \sqrt{2}$ b) $x^2 + 8x + 16$ c) $-2x^2 + 7x - 3$

Giải

a) $f(x) = -3x^2 + x - \sqrt{2}$, có $\Delta = 1 - 12\sqrt{2} < 0$ và $a = -3 < 0$ nên $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $g(x) = x^2 + 8x + 16$ có $\Delta' = 0, a = 1 > 0$ nên $g(x) = 0$ có nghiệm kép $x = -4$ và $g(x) > 0, \forall x \neq -4$

c) $h(x) = -2x^2 + 7x - 3$ có $\Delta = 25 > 0, a = -2 < 0$ nên $h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 3 \end{cases}$ ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
$h(x) = -2x^2 + 7x - 3$	$-$	0	$+$	0	$-$

Suy ra $h(x) > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 3\right)$ và $h(x) < 0, \forall x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$

Củng cố: Cách xét dấu của tam thức bậc 2:

Bước 1: Tìm nghiệm của tam thức bậc 2.

(Dùng MTCT để tìm nghiệm của tam thức bậc 2)

+) Nếu vô nghiệm thì $\Delta < 0$.

+) Nếu có nghiệm kép thì $\Delta = 0$.

+) Nếu có 2 nghiệm thì $\Delta > 0$.

Bước 2: Lập bảng xét dấu, dựa vào dấu của hệ số a và biệt thức Δ .

Bước 3: Dựa vào bảng xét dấu và kết luận. $f(x) > 0 \Leftrightarrow .. f(x) < 0$