

CHUYÊN ĐỀ

PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO – PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1. Nhắc lại:

- + Khái niệm phương trình – nghiệm pt – ĐK nghiệm.
- + Định lý Viét của pt bậc 2, pt bậc 3 một ẩn.
- + Định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai – Ứng dụng.

2. Làm quen phương trình bậc cao.

- + Đa thức bậc n dạng: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$
- + Các giá trị x_i sao cho: $P(x_i) = 0$ được gọi là nghiệm của đa thức $P(x)$.
- + Định lý Bezout: Nếu α là một nghiệm của $P(x)$ thì $P(x)$ chia hết cho $(x - \alpha)$

a. Phương trình bậc ba một ẩn : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. ($a \neq 0$)

- + Nhằm tìm nghiệm phân tích ra thừa số.
- + Giải pt tích.
- + Kết luận.

* **Chú ý** : Có thể sử dụng sơ đồ Horner.

Chia đa thức: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ cho $(x - \alpha)$

Ta có: $P(x) = (x - \alpha)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-1}) + b_n$.

Trong đó: $b_0 = a_0$; $b_i = \alpha \cdot b_{i-1} + a_i$ ($i = 1, 2, 3 \dots n$).

Nếu α là nghiệm của $P(x)$ thì $b_n = 0$.

b. Phương trình dạng $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = e$. (Với: $a + d = b + c$).

- + Đặt ẩn phụ: $t = x^2 + (a + d)x + k \Rightarrow (x + b)(x + c)$ theo t .
- + Thay vào được pt bậc hai ẩn t – Giải pt trên tìm t suy ra x – KL.

c. Phương trình đối xứng dạng : $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$.

- + Kiểm tra $x = 0$ không phải là nghiệm của pt – chia 2 vế của pt cho x^2 được pt:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

- + Đặt ẩn phụ: $t = x + \frac{1}{x}$. ĐK: $|t| \geq 2$.

- + Thay vào được pt bậc hai ẩn t – Giải pt trên tìm t (So sánh với ĐK) suy ra x – KL.

d. Phương trình dạng : $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ ($c \neq 0$)

- + Đặt ẩn phụ: $t = x + \frac{a+b}{2}$.

+ Thay vào được pt trùng phương ẩn t là : $2t^4 + 12\alpha^2 t^2 + 2\alpha^4 - c = 0 \left(c = \frac{a-b}{2} \right)$

+ Giải pt trên tìm t suy ra $x - \text{KL}$.

e. Phương trình dạng : $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \left(ae \neq 0; \frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b} \right)^2 \right)$

+ Đặt ẩn phụ: $t = x + \frac{\alpha}{x} \left(\alpha = \frac{d}{b} \right)$. ĐK :

+ Thay vào được pt bậc hai ẩn t là : $at^2 + bt + c - 2\alpha a = 0$

+ Giải pt trên tìm t suy ra $x - \text{KL}$.

f. Phương trình dạng : $a(x-1)^2 + b(x^2+x+1)^2 + c(x^3-1) = 0 \quad (1)$

Dạng tổng quát : $aA(x) + bB(x) + cC(x) = 0 \left(A(x)B(x) = C^2(x) \right)$

+ Chia 2 vế của (1) cho $B(x) = (x^2+x+1)^2$. Đặt: $t = \frac{x-1}{x^2+x+1}$.

+ Thay vào được pt bậc hai ẩn t là : $at^2 + ct + b = 0$

+ Giải pt trên tìm t suy ra $x - \text{KL}$.

3. Làm quen phương trình vô tỷ.

Đặt ĐK của pt, của ẩn (nếu có).

* Nâng lên lũy thừa tương ứng khử dấu căn (có thể nhiều lần)

* Đặt ẩn phụ thích hợp chuyển phương trình đã cho về các dạng phương trình đã biết cách giải hoặc về hệ phương trình đã biết cách giải.

BÀI TẬP

1. Giải các pt sau:

a. $x^3 + 6x^2 - 2x - 7 = 0$

b. $-3x^3 - 2x^2 + 4x + 1 = 0$

c. $x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$

d. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

e. $12x^3 + 4x^2 - 17x + 6 = 0$

f. $x^3 - 2x + 1 = 0$

g. $x^3 - 9x + 10 = 0$

h. $2x^3 + 3x^2 - 7x + 10 = 0$

i. $x^3 + 4x^2 - 9 = 0$

2. Giải các pt sau:

a. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 24$

b. $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) = 144$

c. $(x-1)(x+4)(x+6)(x-3) = -48$

d. $(x-5)(x-3)(x+3)(x+1) = 45$

e. $(2x-1)(x+3)(2x-5)(x+5) = -72$

f. $(2x+1)(2x-3)(x+3)(x+5) = 63$

g. $(2x+1)(3x-2)(3x-4)(6x-1) = -245$

h. $(2x-1)(x+1)(3x-2)(6x+7) = 200$

3. Giải các pt sau:

a. $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$

b. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$

c. $x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = 0$

d. $x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$

e. $2x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 2 = 0$

f. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$

g. $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1 = 0$

h. $9x^4 + 27x^3 + 8x^2 + 27x + 9 = 0$

i. $4x^4 + 12x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$

4. Giải các pt sau:

a. $x^2 + \sqrt{x^2 - 6} = 12$

. $x^2 + \sqrt{x+1} = 1$

c. $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+4} = 1$

d. $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+1} = 2$

e. $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$

f. $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 3$

g. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$

h. $\sqrt{2x+5} = 8 - \sqrt{x-1}$

i. $\sqrt{x+9} = 5 - \sqrt{2x+4}$

j. $\sqrt{3x-5} = 3 - \sqrt{x-2}$

k. $\sqrt{x+5} + \sqrt{4-x} = 3$

l. $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}$

m. $\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3}$

n. $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{4x-7}$

o. $\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x} = \sqrt{6-x}$

p. $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = \sqrt{9-x}$

q. $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+4}$

r. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+7}$

s. $\sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+2)} = 2x$

t. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$

u. $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x+3}$

v. $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} = 1$

x. $\sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{x+5} = \sqrt[3]{2x+9}$

y. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = \sqrt[3]{2x+3}$

z. $\sqrt{x^2+x-2} - \sqrt{x^2+2x-3} = \sqrt{x^2+4x-5}$