

## CHUYÊN ĐỀ: CẤP SỐ NHÂN

### A. LÝ THUYẾT

#### 1. ĐỊNH NGHĨA.

**Cấp số nhân** là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng trước nhân với một số không đổi  $q$ .

Số không đổi  $q$  được gọi là **công bội** của cấp số nhân.

**Đặc biệt:**

- 1) Khi  $q=1$  thì cấp số nhân là một **dãy số không đổi** (tất cả các số hạng đều bằng nhau).
- 2) Khi  $q=0$  thì cấp số nhân có dạng  $u_1, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots$
- 3) Khi  $u_1=0$  thì với mọi  $q$  cấp số nhân có dạng  $0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

**Nhận xét:** Từ định nghĩa, ta có:

Nếu  $(u_n)$  là một cấp số nhân với công bội  $q$ , ta có công thức truy hồi:

$$u_{n+1} = u_n \cdot q, n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

Trong trường hợp  $u_n \neq 0, \forall n \geq 1$  để chứng minh  $(u_n)$  là một cấp số nhân, chúng ta cần phải chỉ ra tỷ số  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  là một số không đổi với mọi số nguyên dương  $n$ .

#### 2. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA CẤP SỐ NHÂN.

**Định lý 1.** Nếu cấp số nhân  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1$  và công bội  $q$  thì số hạng tổng quát  $u_n$  được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 q^{n-1}, \forall n \geq 2.$$

(2)

**Ví dụ 1.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có  $u_1 = 3$  và  $q = 2$ .

a) Tìm  $u_7$ .

b) Số 12288 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân đã cho?

**Lời giải**

a) Ta có  $u_7 = u_1 q^{7-1} = 3 \cdot 2^6 = 192$ .

b) Số hạng tổng quát của cấp số nhân là  $u_n = u_1 q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$ .

Vì  $u_n = 12288$  nên  $3 \cdot 2^{n-1} = 12288 \Leftrightarrow n = 13$ .

Do  $n = 13$  là số nguyên dương nên số 12288 là số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

**Ví dụ 2.** Cho cấp số nhân  $(x_n)$  có  $x_3 = 18$  và  $x_7 = 1458$ . Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đó

**Lời giải**

Gọi  $q$  là công bội của cấp số nhân  $(x_n)$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_3 = 18 \\ x_7 = 1458 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot q^2 = 18 \\ x_1 \cdot q^6 = 1458 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot q^2 = 18 \\ x_1 \cdot q^2 \cdot q^4 = 1458 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ q^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ q = \pm 3 \end{cases}$$

+ Với  $x_1 = 2$  và  $q = 3$ , ta có số hạng tổng quát là  $x_n = x_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$ .

+ Với  $x_1 = 2$  và  $q = -3$ , ta có số hạng tổng quát là  $x_n = x_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot (-3)^{n-1}$ .

### 3. TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ NHÂN

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}, \quad k \geq 2 \quad (3)$$

**Ví dụ .** a) Cho cấp số nhân  $(a_n)$  có  $a_7 = 4$  và  $a_9 = 12$ . Tìm  $a_8$ .

b) Cho cấp số nhân  $3, x, 12, y$ . Tính giá trị của biểu thức  $F = x^3 + y^3$ .

#### Lời giải

a) Theo tính chất của cấp số nhân, ta có  $a_8^2 = a_7 \cdot a_9 = 4 \cdot 12 = 48$  Suy ra  $a_8 = 4\sqrt{3}$  hoặc  $a_8 = -4\sqrt{3}$ .

b) Theo tính chất của cấp số nhân, ta có  $x^2 = 3 \cdot 12 = 36$  và  $x \cdot y = 12^2 = 144$ .  
Giải ra ta được  $x = 6; y = 24$  hoặc  $x = -6; y = -24$ .

+ Với  $x = 6; y = 24$  thì  $F = x^3 + y^3 = 14040$ .

+ Với  $x = -6; y = -24$  thì  $F = x^3 + y^3 = -14040$ .

Vậy  $F = 14040$  hoặc  $F = -14040$ .

### 4. TỔNG N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA CẤP SỐ NHÂN.

Cho một cấp số nhân  $(u_n)$  với công bội  $q \neq 1$ . Đặt  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ . Khi đó:

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} \quad (4) \text{ hoặc } S_n = \frac{u_1 - u_{n+1}}{1-q} \quad (5)$$

**Ví dụ .** a) Tính tổng  $S = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{12}$ .

b) Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có  $u_1 = 3$  và công bội  $q = 2$ . Tìm  $k$ , biết  $S_k = 189$ .

#### Lời giải

a) Ta có dãy số  $1, 10, 10^2, \dots, 10^{12}$  lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu  $u_1 = 1$  và công bội  $q = 10$ . Cấp số nhân này có 13 số hạng. Do đó

$$S = S_{13} = \frac{u_1(1-q^{13})}{1-q} = \frac{1}{9}(10^{13} - 1).$$

b) Ta có  $S_k = \frac{u_1(1-q^k)}{1-q} = \frac{3(1-2^k)}{1-2} = 3(2^k - 1)$ . Theo giả thiết, ta có

$$3(2^k - 1) = 189 \Leftrightarrow 2^k = 2^6 \Leftrightarrow k = 6.$$

### B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ CẤP SỐ NHÂN

**Câu 1.** Cho cấp số nhân  $(a_n)$  có  $a_1 = 3$  và  $a_2 = -6$ . Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đã cho.

**A.**  $u_n = 3 \cdot (-2)^n$ .

**B.**  $u_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$ .

**C.**  $u_n = 3 \cdot (2)^{n-1}$ .

**D.**  $u_n = 3 \cdot (2)^n$ .

**Câu 2.** Cho cấp số nhân  $(a_n)$  có  $a_1 = 3$  và  $a_2 = -6$ . Tìm tổng  $S$  của 50 số hạng đầu tiên cấp số nhân đã cho.

A.  $S = 2^{50} - 1$ .

B.  $S = 2^{51} - 1$ .

C.  $S = 1 - 2^{50}$ .

D.  $S = 1 - 2^{51}$ .

**Câu 3.** Cho cấp số nhân  $(a_n)$  có  $a_1 = 3$  và  $a_2 = -6$ . Biết rằng  $S_k = -16383$ , tính  $a_k$ .

A.  $a_k = -24576$ .

B.  $a_k = 24576$ .

C.  $a_k = -49152$ .

D.  $a_k = 49152$ .

**Câu 4.** Cho cấp số nhân  $(x_n)$  có  $\begin{cases} x_2 - x_4 + x_5 = 10 \\ x_3 - x_5 + x_6 = 20 \end{cases}$ . Tìm  $x_1$  và công bội  $q$ .

A.  $x_1 = 1, q = 2$ .

B.  $x_1 = -1, q = 2$ .

C.  $x_1 = -1, q = -2$ .

D.  $x_1 = 1, q = -2$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_2 - x_4 + x_5 = 10 \\ x_3 - x_5 + x_6 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2(1 - q^2 + q^3) = 10 \\ x_2 q(1 - q^2 + q^3) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ q = 2 \end{cases}$$

Suy ra  $x_1 = \frac{x_2}{q} = 1$ . Vậy phương án đúng là A.

**Câu 5.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có tổng  $n$  số hạng đầu tiên là  $S_n = 5^n - 1$ . Tìm số hạng đầu  $u_1$  và công bội  $q$  của cấp số nhân đó.

A.  $u_1 = 6, q = 5$ .

B.  $u_1 = 5, q = 4$ .

C.  $u_1 = 4, q = 5$ .

D.  $u_1 = 5, q = 6$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } u_1 = S_1 = 5 - 1 = 4 \text{ và } u_2 = S_2 - S_1 = (5^2 - 1) - (5 - 1) = 20.$$

**Câu 6.** Một khu rừng có trữ lượng gỗ là  $4 \cdot 10^5$  mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ

A.  $4 \cdot 10^5 \cdot (0,05)^5$ .

B.  $4 \cdot 10^5 \cdot (1,4)^5$ .

C.  $4 \cdot 10^5 \cdot (1,04)^5$ .

D.  $4 \cdot (10,4)^5$ .

**Lời giải**

Đặt  $u_0 = 4 \cdot 10^5$  và  $r = 4\% = 0,04$ . Gọi  $u_n$  là trữ lượng gỗ của khu rừng sau năm thứ  $n$ .

Khi đó ta có  $u_{n+1} = u_n + u_n(1+r), n \in \mathbb{N}$ .

Suy ra  $(u_n)$  là cấp số nhân với số hạng đầu  $u_0$  và công bội  $q = 1+r$ .

Do đó số hạng tổng quát của cấp số nhân  $(u_n)$  là  $u_n = u_0(1+r)^n$ .

Sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có:  $u_n = u_1 \cdot q^4 = 4 \cdot 10^5 \cdot (1+0,04)^5 = 4 \cdot (10,4)^5$  mét khối gỗ.

**Câu 7.** Bài toán “**Lãi kép**”

Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Giả sử

trong khoảng thời gian gửi người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được gần với số tiền nào trong các số tiền dưới đây?

- A. 196715000 đồng. B. 196716000 đồng.  
C. 183845000 đồng. D. 183846000 đồng.

**Lời giải**

Đặt  $M_0 = 10^8$  (đồng) và  $r = 7\% = 0,07$ .

Gọi  $M_n$  là số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được sau  $n$  năm.

Theo giả thiết, ta có  $M_{n+1} = M_n + M_n \cdot r = M_n(1+r)$ ,  $\forall n \geq 1$ .

Do đó dãy số  $(M_n)$  là cấp số nhân với số hạng đầu  $M_0$  và công bội

$q = 1+r$ . Suy ra  $M_n = M_0(1+r)^n$ .

Vì vậy, sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được là

$$M_{10} = M_0(1+r)^{10} = 10^8 \cdot (1,07)^{10} \approx 196715000.$$

Vậy phương án đúng là A.

**Câu 8.** Một người gửi ngân hàng 150 triệu đồng theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,58% một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền lãi tháng trước đó và tiền gốc của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có 180 triệu đồng?

- A. 34 tháng. B. 32 tháng.  
C. 31 tháng. D. 30 tháng.

**Lời giải**

Theo ví dụ 9, thì sau  $n$  tháng gửi tiết kiệm, ta có

$$M_n = M_0(1+r)^n, \text{ trong đó } M_0 = 15 \cdot 10^7, r = 0,0058.$$

$$\text{Do đó } M_n = 15 \cdot 10^7 \cdot (1,0058)^n.$$

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

$$+ \text{Phương án A: } M_{34} = 15 \cdot 10^7 \cdot (1,0058)^{34} \approx 182594000 \text{ (đồng).}$$

$$+ \text{Phương án B: } M_{32} = 15 \cdot 10^7 \cdot (1,0058)^{32} \approx 180494000 \text{ (đồng).}$$

$$+ \text{Phương án C: } M_{31} = 15 \cdot 10^7 \cdot (1,0058)^{31} \approx 179453000 \text{ (đồng).}$$

Vậy, phương án đúng là B. (Không cần kiểm tra phương án D vì ở phương án D, số tháng ít hơn ở phương án C nên số tiền sẽ ít hơn nữa).

-----**HẾT**-----