NHẬP MÔN TOÁN TỔ HỢP

Quy tắc đếm

Phương pháp .

1. Quy tắc cộng

a) Định nghĩa: Xét một công việc H.

Giả sử H có k phương án $H_1, H_2, ..., H_k$ thực hiện công việc H. Nếu có m_1 cách thực hiện phương án H_1, có m_2 cách thực hiện phương án H_2,.., có m_k cách thực hiện phương án H_k và mỗi cách thực hiện phương án H_i không trùng với bất kì cách thực hiện phương án H_j $(i \neq j; i, j \in \{1, 2, ..., k\})$ thì có $m_1 + m_2 + ... + m_k$ cách thực hiện công việc H.

b) Công thức quy tắc cộng

Nếu các tập $A_1, A_2, ..., A_n$ đôi một rời nhau. Khi đó:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$$

2. Quy tắc nhân.

a) Định nghĩa: Giả sử một công việc H bao gồm k công đoạn $H_1, H_2, ..., H_k$. Công đoạn H_1 có m_1 cách thực hiện, công đoạn H_2 có m_2 cách thực hiện,…, công đoạn H_k có m_k cách thực hiện. Khi đó công việc H có thể thực hiện theo $m_1.m_2...m_k$ cách.

b) Công thức quy tắc nhân

Nếu các tập $A_1, A_2, ..., A_n$ đôi một rời nhau. Khi đó:

$$|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n| = |A_1|.|A_2|.....|A_n|.$$

3. Phương pháp đếm bài toán tổ hợp dựa vào quy tắc cộng

Để đếm số cách thực hiện một công việc H nào đó theo quy tắc cộng ta cần phân tích xem công việc H đó có bao nhiêu phương án thực hiện? Mỗi phương án có bao nhiêu cách chọn?

4. Phương pháp đếm bài toán tổ hợp dựa vào quy tắc nhân

Để đếm số cách thực hiện công việc H theo quy tắc nhân, ta cần phân tích công việc H được chia làm các giai đoạn $H_1, H_2, ..., H_n$ và đếm số cách thực hiện mỗi giai đoạn H_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

Nhận xét:

1. Ta thường gặp bài toán đếm số phương án thực hiện hành động H thỏa mãn tính chất T. Để giải bài toán này ta thường giải theo hai cách sau

Cách 1: Đếm trực tiếp

- Nhận xét đề bài để phân chia các trường hợp xảy ra đối với bài toán cần đếm.
- Đếm số phương án thực hiện trong mỗi trường hợp đó
- Kết quả của bài toán là tổng số phương án đếm trong cách trường hợp trên

Chú ý: * Để đếm số phương án thực hiện trong mỗi trường hợp ta phải chia hành động trong mỗi trường hợp đó thành phương án hành động nhỏ liên tiếp nhau

Và sử dụng quy tắc nhân, các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp để đếm số phương án thực hiện các hành các hành động nhỏ đó.

* Các dấu hiệu đặc trưng để giúp ta nhận dạng một hoán vị của n phần tử là:

+) Tất cả n phần tử đều phải có mặt

+) Mỗi phần tử xuất hiện một lần.

+) Có thứ tự giữa các phần tử.

* Ta sẽ sử dụng khái niệm chỉnh hợp khi

+) Cần chọn k phần tử từ n phần tử, mỗi phần tử xuất hiện một lần

+) k phần tử đã cho được sắp xếp thứ tự.

* Ta sử dụng khái niệm tổ hợp khi

+) Cần chọn k phần tử từ n phần tử, mỗi phần tử xuất hiện một lần

+) Không quan tâm đến thứ tự k phần tử đã chọn.

Phương án 2: Đếm gián tiếp (đếm phần bù)

Trong trường hợp hành động H chia nhiều trường hợp thì ta đi đếm phần bù của bài toán như sau:

- Đếm số phương án thực hiện hành động H (không cần quan tâm đến có thỏa tính chất T hay không) ta được a phương án.
- Đếm số phương án thực hiện hành động H không thỏa tính chất T ta được b phương án.

Khi đó số phương án thỏa yêu cầu bài toán là: $a-b$.

2. Ta thường gặp ba bài toán đếm cơ bản

Bài toán 1: Đếm số phương án liên quan đến số tự nhiên

Khi lập một số tự nhiên $x=\overline{a_1...a_n}$ ta cần lưu ý:

* $a_i \in \{0,1,2,...,9\}$ và $a_1 \ne 0$.

* x là số chẵn $\Leftrightarrow a_n$ là số chẵn

* x là số lẻ $\Leftrightarrow a_n$ là số lẻ

* x chia hết cho $3 \Leftrightarrow a_1+a_2+...+a_n$ chia hết cho 3

* x chia hết cho 4 $\Leftrightarrow \overline{a_{n-1}a_n}$ chia hết cho 4

* x chia hết cho $5 \Leftrightarrow a_n \in \{0,5\}$

* x chia hết cho $\Leftrightarrow x$ là số chẵn và chia hết cho 3

* x chia hết cho $8 \Leftrightarrow \overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$ chia hết cho 8

* x chia hết cho $9 \Leftrightarrow a_1+a_2+...+a_n$ chia hết cho 9.

* x chia hết cho $11 \Leftrightarrow$ tổng các chữ số ở hàng lẻ trừ đi tổng các chữ số ở hàng chẵn là một số chia hết cho 11.

* x chia hết cho $25 \Leftrightarrow$ hai chữ số tận cùng là $00,25,50,75$.

Bài toán 2: Đếm số phương án liên quan đến kiến thức thực tế

Bài toán 3: Đếm số phương án liên quan đến hình học

Các ví dụ

Ví dụ 1. Từ thành phố A đến thành phố B có 6 con đường, từ thành phố B đến thành phố C có 7 con đường. Có bao nhiêu cách đi từ thành phố A đến thành phố C, biết phải đi qua thành phố B.

Lời giải.

Để đi từ thành phố A đến thành phố B ta có 6 con đường để đi. Với mỗi cách đi từ thành phố A đến thành phố B ta có 7 cách đi từ thành phố B đến thành phố C. Vậy có $6.7=42$ cách đi từ thành phố A đến B.

Ví dụ 2. Từ các số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số tự mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3?

Lời giải.

Đặt $y=23$, xét các số $x=\overline{abcde}$ trong đó a,b,c,d,e đôi một khác nhau và thuộc tập $\{0,1,y,4,5\}$. Có $P_5-P_4=96$ số như vậy

Khi ta hoán vị $2,3$ trong y ta được hai số khác nhau

Nên có $96.2=192$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3. Có 3 học sinh nữ và 2 hs nam .Ta muốn sắp xếp vào một bàn dài có 5 ghế ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp để :

1. 3 học sinh nữ ngồi kề nhau

2. 2. 2 học sinh nam ngồi kề nhau.

Lời giải.

1. Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán: $3!.3! = 36$

2. Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán: $2!.4! = 48$

Ví dụ 4. Xếp 6 người A, B, C, D, E, F vào một ghế dài .Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho:

1. A và F ngồi ở hai đầu ghế

2. A và F ngồi cạnh nhau

3. A và F không ngồi cạnh nhau

Lời giải.

1. Số cách xếp A, F: $2! = 2$

Số cách xếp B, C, D, E : $4! = 24$

Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán: $2.24 = 48$

2. Xem AF là một phần tử X, ta có: $5! = 120$ số cách xếp X, B, C, D, E. Khi hoán vị A, F ta có thêm được một cách xếp

Vậy có 240 cách xếp thỏa yêu cầu bài toán.

3. Số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán: $6! - 240 = 480$ cách

Ví dụ 5. Có bao nhiêu chữ số chẵn gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số $0,1,2,4,5,6,8$.

Lời giải.

Lời giải. Gọi $x = \overline{abcd};\ a, b, c, d \in \{0,1,2,4,5,6,8\}$.

Cách 1: Tính trực tiếp

Vì x là số chẵn nên $d \in \{0,2,4,6,8\}$.

TH 1: $d = 0 \Rightarrow$ có 1 cách chọn d.

Với mỗi cách chọn d ta có 6 cách chọn $a \in \{1,2,4,5,6,8\}$

Với mỗi cách chọn a, d ta có 5 cách chọn $b \in \{1,2,4,5,6,8\} \setminus \{a\}$

Với mỗi cách chọn a, b, d ta có 4 cách chọn $c \in \{1,2,4,5,6,8\} \setminus \{a, b\}$

Suy ra trong trường hợp này có $1.6.5.4 = 120$ số.

TH 2: $d \neq 0 \Rightarrow d \in \{2,4,6,8\} \Rightarrow$ có 4 cách chọn d

Với mỗi cách chọn d, do $a \neq 0$ nên ta có 5 cách chọn $a \in \{1,2,4,5,6,8\} \setminus \{d\}$.

Với mỗi cách chọn a, d ta có 5 cách chọn $b \in \{1,2,4,5,6,8\} \setminus \{a\}$

Với mỗi cách chọn a, b, d ta có 4 cách chọn $c \in \{1,2,4,5,6,8\} \setminus \{a, b\}$

Suy ra trong trường hợp này có $4.5.5.4 = 400$ số.

Vậy có tất cả $120 + 400 = 520$ số cần lập.

Cách 2: Tính gián tiếp (đếm phần bù)

Gọi $A =$ { số các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số $0,1,2,4,5,6,8$ }

$B =$ { số các số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số $0,1,2,4,5,6,8$ }

$C =$ { số các số tự nhiên chẵn có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số $0,1,2,4,5,6,8$ }

Ta có: $|C| = |A| - |B|$.

Dễ dàng tính được: $|A| = 6.6.5.4 = 720$.

Ta đi tính $|B|$?

$x=\overline{abcd}$ là số lẻ $\Rightarrow d\in\{1,5\}\Rightarrow d$ có 2 cách chọn.

Với mỗi cách chọn d ta có 5 cách chọn a (vì $a\neq 0, a\neq d$)

Với mỗi cách chọn a,d ta có 5 cách chọn b

Với mỗi cách chọn a,b,d ta có 4 cách chọn c

Suy ra $|B|=2.5.5.4=200$

Vậy $|C|=520$.

Ví dụ 6. Cho tập $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

1. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số đôi một khác nhau sao các số này lẻ không chia hết cho 5.

2. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số đôi một khác nhau sao chữ số đầu chẵn chữ số đứng cuối lẻ.

Lời giải.

Gọi $x=\overline{a_1...a_8}$ là số cần tìm

1. Vì x lẻ và không chia hết cho 5 nên $d\in\{1,3,7\}\Rightarrow d$ có 3 cách chọn

Số các chọn các chữ số còn lại là: $7.6.5.4.3.2.1$

Vậy 15120 số thỏa yêu cầu bài toán.

2. Vì chữ số đứng đầu chẵn nên a_1 có 4 cách chọn, chữ số đứng cuối lẻ nên a_8 có 4 cách chọn. Các số còn lại có $6.5.4.3.2.1$ cách chọn

Vậy có $4^2.6.5.4.3.2.1=11520$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 7. Cho tập $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$

1. Từ tập A ta có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 4 chữ số đôi một khác nhau

2. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số và chia hết cho 5.

Lời giải.

1. Gọi số cần lập $x=\overline{abcd}$, $a,b,c,d\in\{0,1,2,3,4,5,6\}; a\neq 0$

Chọn a: có 6 cách; chọn b,c,d có $6.5.4$

Vậy có 720 số.

2. Gọi $x=\overline{abcde}$ là số cần lập, $e\in\{0,5\}, a\neq 0$

• $e=0\Rightarrow e$ có 1 cách chọn, cách chọn a,b,c,d: $6.5.4.3$

Trường hợp này có 360 số

$e=5\Rightarrow e$ có một cách chọn, số cách chọn a,b,c,d: $5.5.4.3=300$

Trường hợp này có 300 số

Vậy có 660 số thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 8. Cho tập hợp số : $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$.Hỏi có thể thành lập bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 3.

Lời giải.

Ta có một số chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số chia hết cho 3. Trong tập A có các tập con các chữ số chia hết cho 3 là $\{0,1,2,3\}$, $\{0,1,2,6\}$, $\{0,2,3,4\}$, $\{0,3,4,5\}$, $\{1,2,4,5\}$, $\{1,2,3,6\}$, $\{1,3,5,6\}$.

Vậy số các số cần lập là: $4(4!-3!)+3.4!=144$ số.

Ví dụ 9. Từ các số của tập $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau trong đó có hai chữ số lẻ và hai chữ số lẻ đứng cạnh nhau.

Lời giải.
Vì có 3 số lẻ là 1,3,5, nên ta tạo được 6 cặp số kép: $13,31,15,51,35,53$
Gọi A là tập các số gồm 4 chữ số được lập từ $X=\{0,13,2,4,6\}$.
Gọi A_1,A_2,A_3 tương ứng là số các số tự nhiên lẻ gồm 4 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số của tập $X=\{0,13,2,4,6\}$ và 13 đứng ở vị trí thứ nhất, thứ hai và thứ ba.
Ta có: $|A_1|=A_4^3=24;|A_2|=|A_3|=3.3.2=18$ nên $|A|=24+2.18=60$
Vậy số các số cần lập là: $6.60=360$ số.

Ví dụ 10. Từ các số $1,2,3,4,5,6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên ,mỗi số có 6 chữ số đồng thời thỏa điều kiện :sáu số của mỗi số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng của 3 số sau một đơn vị.

Lời giải.
Cách 1: Gọi $x=\overline{a_1a_2...a_6}$, $a_i\in\{1,2,3,4,5,6\}$ là số cần lập
Theo bài ra ta có: $a_1+a_2+a_3+1=a_4+a_5+a_6$ (1)
Mà $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\in\{1,2,3,4,5,6\}$ và đôi một khác nhau nên
$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=1+2+3+4+5+6=21$ (2)
Từ (1), (2) suy ra: $a_1+a_2+a_3=10$
Phương trình này có các bộ nghiệm là: $(a_1,a_2,a_3)=(1,3,6);\ (1,4,5);\ (2,3,5)$
Với mỗi bộ ta có $3!.3!=36$ số.
Vậy có cả thảy $3.36=108$ số cần lập.
Cách 2: Gọi $x=\overline{abcdef}$ là số cần lập
Ta có: $\begin{cases}a+b+c+d+e+f=1+2+3+4+5+6=21\\ a+b+c=d+e+f+1\end{cases}$
$\Rightarrow a+b+c=11$. Do $a,b,c\in\{1,2,3,4,5,6\}$
Suy ra ta có các cặp sau: $(a,b,c)=(1,4,6);\ (2,3,6);\ (2,4,5)$
Với mỗi bộ như vậy ta có $3!$ cách chọn a,b,c và $3!$ cách chọn d,e,f
Do đó có: $3.3!.3!=108$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 11.Từ các số $1,2,3$ lập được bao nhiều số tự nhiên gôm 6 chữ số thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau
1. Trong mỗi số, mỗi chữ số có mặt đúng một lần
2. Trong mỗi số, hai chữ số giống nhau không đứng cạnh nhau.

Lời giải.

Đặt $A=\{1,2,3\}$. Gọi S là tập các số thỏa yêu cầu thứ nhất của bài toán

Ta có số các số thỏa điều kiện thứ nhất của bài toán là $\dfrac{6!}{2^3}=90$ (vì các số có dạng $\overline{aabbcc}$ và khi hoán vị hai số a,a ta được số không đổi)
Gọi S_1,S_2,S_3 là tập các số thuộc S mà có $1,2,3$ cặp chữ số giống nhau đứng cạnh nhau.
- Số phần tử của S_3 chính bằng số hoán vị của 3 cặp $11,22,33$ nên $|S_3|=6$

- Số phần tử của S_2 chính bằng số hoán vị của 4 phần tử là có dạng a,a,bb,cc nhưng a,a không đứng cạnh nhau. Nên $\left|S_2\right| = \frac{4!}{2} - 6 = 6$ phần tử.
- Số phần tử của S_1 chính bằng số hoán vị của các phần tử có dạng a,a,b,b,cc nhưng a,a và b,b không đứng cạnh nhau nên $\left|S_1\right| = \frac{5!}{4} - 6 - 12 = 12$

Vậy số các số thỏa yêu cầu bài toán là: $90 - (6 + 6 + 12) = 76$.

Ví dụ 12 Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số 2011 chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số 9.

Lời giải.

Đặt X là các số tự nhiên thỏa yêu cầu bài toán.

$A =$ { các số tự nhiên không vượt quá 2011 chữ số và chia hết cho 9}

Với mỗi số thuộc A có m chữ số $(m \le 2008)$ thì ta có thể bổ sung thêm $2011 - m$ số 0 vào phía trước thì số có được không đổi khi chia cho 9. Do đó ta xét các số thuộc A có dạng

$\overline{a_1 a_2 ... a_{2011}}$; $a_i \in \{0,1,2,3,...,9\}$

$A_0 = \{a \in A \mid$ mà trong a không có chữ số 9}

$A_1 = \{a \in A \mid$ mà trong a có đúng 1 chữ số 9}

- Ta thấy tập A có $1 + \frac{9^{2011} - 1}{9}$ phần tử
- Tính số phần tử của A_0

Với $x \in A_0 \Rightarrow x = \overline{a_1 ... a_{2011}}; a_i \in \{0,1,2,...,8\}$ $i = \overline{1,2010}$ và $a_{2011} = 9 - r$ với $r \in [1;9], r \equiv \sum_{i=1}^{2010} a_i$. Từ đó ta suy ra A_0 có 9^{2010} phần tử

- Tính số phần tử của A_1

Để lập số của thuộc tập A_1 ta thực hiện liên tiếp hai bước sau

Bước 1: Lập một dãy gồm 2010 chữ số thuộc tập $\{0,1,2...,8\}$ và tổng các chữ số chia hết cho 9. Số các dãy là 9^{2009}

Bước 2: Với mỗi dãy vừa lập trên, ta bổ sung số 9 vào một vị trí bất kì ở dãy trên, ta có 2010 các bổ sung số 9

Do đó A_1 có 2010.9^{2009} phần tử.

Vậy số các số cần lập là:

$$1 + \frac{9^{2011} - 1}{9} - 9^{2010} - 2010.9^{2009} = \frac{9^{2011} - 2019.9^{2010} + 8}{9}.$$